Zusammenfassung Theorie Kapitel H

Die Zuordnungen, mit denen wir uns bisher beschäftigt haben, sind häufig Funktionen. Bei einer **Funktion** wird einem Wert (z. B. Gewicht in kg) eindeutig ein anderer Wert (z. B. Franken) zugeordnet.

- Falls die Zuordnung eindeutig ist, handelt es sich um eine Funktion.
  Beispiel: In 10 Minuten überstreicht der grosse Zeiger einer Uhr einen Winkel von 60°. 10 min $\mapsto$ 60°
- Falls die Zuordnung nicht eindeutig ist, handelt es sich nicht um eine Funktion.
  Beispiel: Die Zuordnung, die jedem Menschen seine Grossmutter zuordnet, ist nicht eindeutig.

Eine Zuordnung $f\colon\ A \to B,\ x \mapsto f(x)$, die jedem Element x der Menge A eindeutig (d. h. genau ein) Element f(x) der Menge B zuordnet, nennt man **Abbildung**. Sind A und B Zahlmengen, spricht man von **Funktionen**.

Eine Funktion lässt sich mit einem Pfeildiagramm, einer Wertetabelle, einem Graph oder mit einer Funktionsgleichung darstellen.

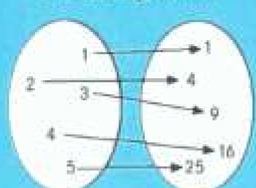
Beispiel: Bei einem Quadrat berechnet man aus der Seitenlänge s den Flächeninhalt A. $A = s^2$ ist die **Funktionsgleichung**.

A ist eine Funktion von s, da mit der unabhängigen Variablen s die abhängige Variable A berechnet wird.

Man schreibt auch $A = f(s) = s^2$. Lies: «A ist eine Funktion von s.»

Oft werden die Variablen mit x und y bezeichnet.
Die Funktionsgleichung $y = x^2$ kann also das gleiche bedeuten wie $A = s^2$.

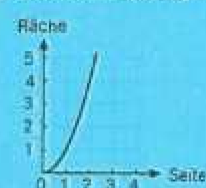
Pfeildiagramm



Wertetabelle

Seite	Fläche
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

(Funktions-)Graph



Eine Funktion, die eine (und somit beide) der folgenden Eigenschaften hat, nennt man **Proportionalität**:

(I) Zum n-fachen Vorderglied gehört das n-fache Hinterglied.
Beispiel: 2 Liter Milch kosten 3.40 Fr.
$3 \cdot 2$ Liter Milch = 6 Liter Milch kosten $3 \cdot 3.40$ Fr. = 10.20 Fr.
$n \cdot 2$ Liter Milch kosten $n \cdot 3.40$ Fr.

(II) Alle Paare der Abbildung (ausser $0 \mapsto 0$) sind quotientengleich.
Der Quotient heisst **Proportionalitätsfaktor**.
Beispiel: Milchpreis

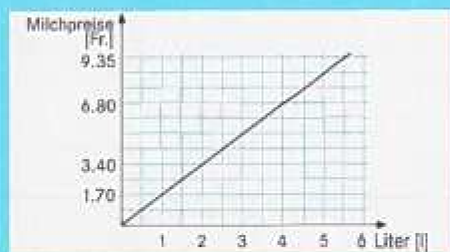
$$k = \frac{3.40}{2}\,\text{Fr./l} = \frac{10.20}{6\text{l}}\,\text{Fr./l} = 1.70\,\text{Fr./l} = \text{Literpreis}$$

Weitere Eigenschaften von **Proportionalitäten**:

- Der Graph einer Proportionalität ist eine Gerade durch den Nullpunkt (0/0), eine sog. Ursprungsgerade.

	Liter Milch		Preis in Franken	
$\cdot 8$	1	$\xrightarrow{\cdot 1.7}$	1.70	$\cdot 8$
	2	$\xrightarrow{\cdot 1.7}$	3.40	
	8	$\xrightarrow{\cdot 1.7}$	13.60	
: 40	20	$\xrightarrow{\cdot 1.7}$	34.–	: 40
	0.5	$\xrightarrow{\cdot 1.7}$	0.85	

Wertetabelle



Graph

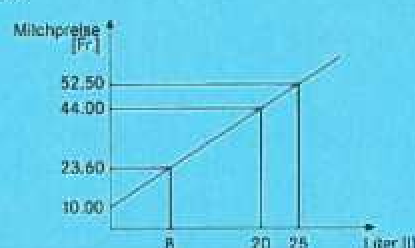
- Die Funktionsgleichung einer Proportionalität ist von der Form $y = k \cdot x$ (k = Proportionalitätsfaktor).
- Dem Vorderglied 0 entspricht das Hinterglied 0.
- Die gesuchten Werte lassen sich mit Hilfe von senkrechten (Beispiel $\cdot$ 8 und : 40) und waagrechten (Beispiel $\cdot$ 1.7, dem Proportionalitätsfaktor) Operatoren berechnen.

Eine Funktion, deren Graph eine Gerade ist, heisst **lineare Funktion**.

Beispiel: Für die Hauslieferung von Milch wird zusätzlich zum Literpreis eine monatliche Gebühr von 10 Fr. berechnet.

Liter Milch	Preis in Fr.
1	11.70
8	23.60
20	44.–
25	52.50

Wertetabelle



Graph

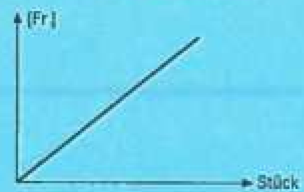
Jede Proportionalität ist auch eine lineare Funktion (aber nicht umgekehrt!).

Proportionalität

(I) Zum n-fachen Vorderglied gehört das n-fache Hinterglied. («Je mehr, desto mehr»)

(II) Alle Paare der Abbildung sind quotientengleich.

Graph: Ursprungsgerade



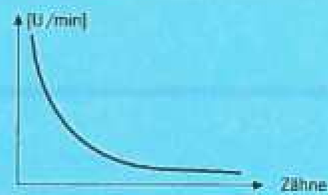
Stück	Preis [Fr.]	
2	$\mapsto$ 9.60	9.60 : 2 = 4.80
3	$\mapsto$ 14.40	14.40 : 3 = 4.80
4	$\mapsto$ 19.20	19.20 : 4 = 4.80
10	$\mapsto$ 48.00	48.– : 10 = 4.80

Umgekehrte Proportionalität

(I) Zum n-fachen Vorderglied gehört das $\frac{1}{n}$-fache Hinterglied. («Je mehr, desto weniger»)

(II) Alle Paare der Abbildung sind produktegleich.

Graph: Hyperbel



Zähne	U/min	
24	$\mapsto$ 36	24 · 36 = 864
12	$\mapsto$ 72	12 · 72 = 864
48	$\mapsto$ 18	48 · 18 = 864
36	$\mapsto$ 24	36 · 24 = 864

Umgekehrte Proportionalitäten berechnen

Mit Produktgleichung

80 km/h $\mapsto$ 1.5 h

60 km/h $\mapsto$ x h

$$\boxed{\begin{aligned} 80 \cdot 1.5 &= 120 \\ 60 \cdot x &= 120 \\ x = \frac{120}{60} &= 2 \end{aligned}}$$

Mit Operator und Umkehroperator

$$\begin{array}{l} 80\ \text{km/h} \mapsto 1.5\ \text{h} \\ 60\ \text{km/h} \mapsto x\ \text{h} \end{array}$$

$\frac{60}{80}\downarrow$ $\qquad \downarrow \cdot \frac{80}{60}\left(= \frac{4}{3}\right)$

$$\boxed{x = 1.5 \cdot \frac{4}{3} = 2}$$