Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe und Definitionen

Laplace-Versuche: Haben bei einem Zufallsversuch mit s möglichen Ergebnissen aufgrund der gegebenen Versuchsituation alle diese Ergebnisse dieselbe Chance aufzutreten, dann ordnen wir jedem Ergebnis die Wahrscheinlichkeit $p(A) = \frac{1}{s}$ zu.
Dass alle Ergebnisse dieselbe Chance haben, kann man nicht beweisen, sondern nur aufgrund der Versuchsituation modellhaft annehmen. Man spricht deshalb oft auch vom Laplace-Modell.

Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit nach Laplace: **p(A) =** $\frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}}$**.**

Relative Häufigkeit eines Ereignisses = $\frac{\textit{absolute Häufigkeit, mit der Ereignis auftritt}}{\textit{Stichprobenumfang}}$

Empirisches Gesetz der grossen Zahlen
Bei langen Versuchsreihen stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten eines Ereignisses in der Nähe der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses.
Es liegt also nahe, jedem Ereignis a eines Zufallsversuches die Wahrscheinlichkeit P(a) zuzuordnen. Diese Wahrscheinlichkeit steht für den festen Wert, auf den sich die relative Häufigkeit konzentriert, wenn der Versuch (unendlich) oft wiederholt wird

Axiome von Kolmogorow:
Ist P eine Funktion, die jedem Ereignis A eines Stichprobenraumes S genau eine reelle Zahl P(A) zuordnet, so heisst P eine Wahrscheinlichkeitsfunktion und jeder Funktionswert P(A) die Wahrscheinlichkeit von A genau dann, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

- P ist positiv, d.h. $P(A) \geq 0$ für jedes $A \in S$
- P ist normiert, d.h. $P(S) = 1$
- P ist additiv, d.h. wenn $A \cap B = \emptyset$, dann ist $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

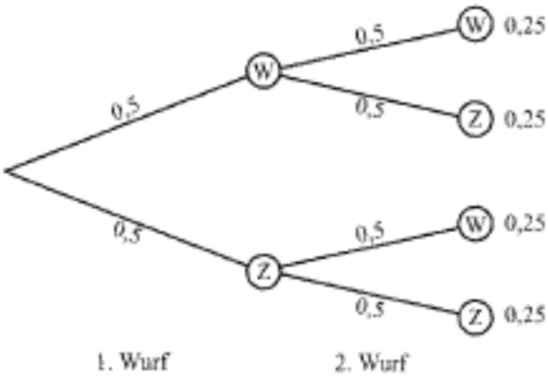
Mehrstufige Zufallsversuche

Beispiel: Werfen zweier Münzen

Es spielt keine Rolle, ob man die Münzen gleichzeitig oder nacheinander wirft, zu beiden Zufallsversuchen gehört der Stichprobenraum (oder Ergebnismenge)
S = {WW, WZ, ZW, ZZ} und jedes der vier Ereignissen hat die Wahrscheinlichkeit 0.25:

		2. Wurf	
		W	Z
1. Wurf	W	WW	WZ
	Z	ZW	ZZ

Statt einer Tafel können wir die möglichen Ergebnisse auch in einem Baumdiagramm darstellen:



Pfadregeln:

- Bei einem mehrstufigen Zufallsversuch ist die Wahrscheinlichkeit eines (durch einen Pfad dargestellten) Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.
  Beispiel: P(WW) = 0.5 · 0.5 = 0.25

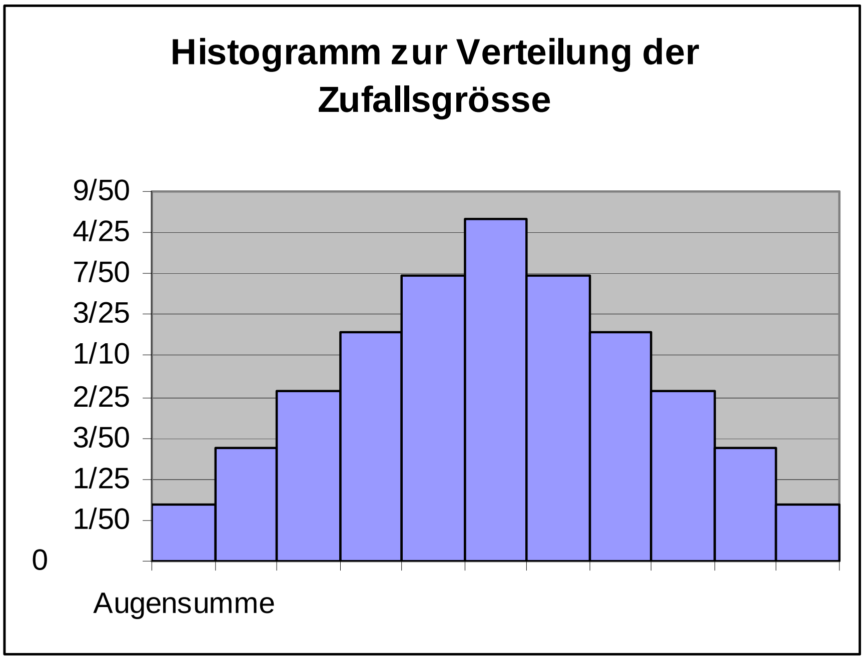
- Setzt sich bei einem mehrstufigen Zufallsversuch ein Ereignis aus verschiedenen Pfaden zusammen, dann erhält man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses durch Addition der einzelnen Pfadwahrscheinlichkeiten.
  Beispiel: P(WZ oder ZW) = 0.25 + 0.25 = 0.5

Zufallsvariablen und deren Verteilungen

Eine Zufallsvariable X ist eine Funktion, die jedem Ereignis eines Zufallsversuchs eine reelle Zahl zuordnet. Das Ereignis X = k enthält alle Ergebnisse a, für die X(a) = k gilt.
Die Wahrscheinlichkeiten P(X = k), mit denen die einzelnen Werte der Zufallsvariable auftreten, gibt man oft in Tabellenform an; eine solche Tabelle, die die Zuordnung k → P(X = k) enthält, heisst (Wahrscheinlichkeits-)Verteilung der Zufallsvariable X.

Beispiel: Augensumme beim 2fachen Würfeln

X: Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Zugehörige Ergebnisse	11	12 21	13 22 31	14 23 32 41	15 24 33 42 51	16 25 34 43 52 61	26 35 44 53 62	36 45 54 63	46 55 64	56 65	66
Zugehörige Wahrscheinlichkeiten	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36



Mit Erwartungswert einer Zufallsvariable X bezeichnet man das mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel:
$E(X) = a_1 \cdot P(X=a_1) + a_2 \cdot P(X=a_2) + a_3 \cdot P(X=a_3) + \ldots$

Beispiel: $E(X) = 1/36(2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 1 = 7$

Binomialverteilungen

Bei Bernoulli-Versuchen unterscheiden wir nur zwei Ergebnisse; das eine nennen wir Erfolg, das andere Misserfolg. Wichtig ist, dass sich bei einem mehrstufigen Zufallsversuch die Wahrscheinlichkeit für Erfolg bzw. Misserfolg von Stufe zu Stufe nicht verändert; das heisst, das Ergebnis einer Versuchsdurchführung hat keinen Einfluss auf das Ergebnis der nächsten Stufe.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg wird mit p bezeichnet, die Wahrscheinlichkeit eines Misserfolges ist dann logischerweise 1 – p = q.

Liegt eine Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p vor, so kann die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer mit folgender Formel berechnet werden:

P(X=k) = $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Die zu einem n-stufigen Bernoulli-Versuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p gehörige Verteilung heisst Binomialverteilung mit den Parametern n und p. Die zugehörige Zufallsgrösse heisst binomialverteilt.