Folgen und Reihen

Grundbegriffe

Reelle Zahlenfolgen sind spezielle Funktionen, deren Definitionsmenge die natürlichen Zahlen und deren Wertemenge die reellen Zahlen sind. Durch eine Vorschrift *f* wird also jeder natürlichen Zahl n genau eine reelle Zahl zugeordnet:

$$f: N \rightarrow R$$
$$n \rightarrow f(n) = a_n$$

Die reellen Zahlen a_1, a_2, …, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, … heissen die Glieder der Folge. a_n ist das n-te Glied der Folge, n wird als Index von a_n bezeichnet.

Folgen können auf zwei Arten definiert werden:

- durch eine Funktionsvorschrift $a_n = f(n)$ (explizite Definition)
- durch eine Rekursionsformel mit Vorgabe von a_1 (rekursive Definition)

Die Summe der ersten n Glieder einer Zahlenfolge heisst n-te Partialsumme:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

1. Berechne die ersten 5 Glieder:
a) $a_n = 4n – 1$
b) $b_n = n^2 – 3n$
c) $c_n = (n + 1)^{-1}$
d) $d_n = 2^n – n^2$

2. Berechne das 5. Glied:
a) $a_1 = 6$, $a_{n+1} = a_n + 8$
b) $b_1 = 1$, $b_n = 3b_{n-1}$
c) $c_1 = 3$, $c_n = 2c_{n-1} + n$
d) $d_1 = 3$, $d_{n+1} = 2d_n – n$

3. Berechne das 6. Glied:
a) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$
b) $b_1 = 0$, $b_2 = 16$, $b_{n+2} = 0,5(b_{n+1} + b_n)$

4. Definiere die Folge sowohl explizit als auch rekursiv:
a) 1, 4, 7, 10, 13, ...
b) 6, 13, 20, 27, 34, ...
c) 6, 12, 24, 48, 96, ...
d) 2, 4, 8, 16, 32, ...

5. Definiere die Folge rekursiv:
a) 0.1, 0.01 , 0.001, 0.0001, ...
b) 5, 11, 23, 47, 95, ...
c) $a_n = 3n – 1$
d) $b_n = 2 \cdot 3^n$

6. $a_n = n$. Berechne die Summe der ersten 1000 Glieder dieser Folge.

7. Welches ist das kleinste Glied der Folge $y_n = 0.5n^2 – 12n + 3$?

8. Welches ist das grösste Glied der Folge $a_n = - 3n^2 + 42n – 7$?

9. Gesucht ist das kleinste n, für welches a_n grösser als 1000 ist: $a_n = 1.5^n$.

10. $x_1 = 1024$, $x_{n+1} = 0.5x_n$. Wie viele Glieder dieser Folge sind grösser als 0.1?

Arithmetische Folgen und Reihen

Die folgenden Folgen sind alles **arithmetische** Folgen:

a) 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

b) 4, 10, 16, 22, ...

c) 3, 8, 13, 18, ...

d) $a_n = 2 + 3(n - 1)$

1. Untersuche diese Folgen auf ihre Gesetzmässigkeiten.
2. Kannst Du erklären, wieso diese Folgen **arithmetische** Folgen heissen?
3. Stelle eine Formel auf um das n te Glied einer arithmetischen Folge zu berechnen.
4. Bilde nun die arithmetische Reihe (Partialsummen). Berechne die Summe. Formel?
5. Betrachte nun die Funktion $n \mapsto a_n$. Beschreibe den Graphen.

Definition:

Berechnung des n-ten Gliedes

Name:

Graph

Arithmetische Reihe:

Übungen

11. Berechne die Differenz d der AF:
a) $a_5 = 13$, $a_8 = 25$ **b)** $b_{10} = -1$, $b_{38} = 6$

12. Berechne d der AF so wie a_1 und a_{50}:
a) $a_6 = 13$, $a_{14} = 45$ **b)** $b_{25} = 100$, $b_{75} = 25$

13. Von einer AF kennt man zwei Glieder. Berechne das gesuchte Glied und gib eine explizite Definition der Folge an:
a) $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_{10} = ?$ **b)** $b_{10} = 12$, $b_{20} = 18$, $b_1 = ?$

14. Wie viele Glieder der AF ($a_1 = 10$, $a_2 = 18$) sind kleiner als 1000?

15. $a_n = 101 - 2n$. Für welche s_n gilt: $s_n \geq 2000$?

16. Bei einer AF ist $s_7 = 21$ und $s_8 = 25$. Berechne a_1 und d.

17. Eine AF beginnt mit 3 und endet mit 37; ihre n-te Partialsumme beträgt 400. Wie viele Glieder hat die Folge? Wie lautet das zweite Glied der Folge?

18. Die Summe des ersten, dritten und fünften Gliedes eines AF ist 33. Das Produkt der ersten drei Folgenglieder ist 231. Berechne a_1 und d der AF.

19. Zwischen 6 und – 9 sollen 4 Glieder so eingeschaltet werden, dass eine AF entsteht.

20. Berechne die Summe aller ungeraden Zahlen von 7 bis 37.

21. Wie gross ist die Summe sämtlicher Zahlen zwischen 8 und 498, die durch 7 den Rest 1 ergeben?

22. Die Summe des 3. und 11. Gliedes einer AF ist gleich 34, die des 7. und 12. Gliedes gleich 44. Welches ist die Summe der ersten 25 Glieder dieser Reihe?

23. Ein im luftleeren Raum frei fallender Körper legt in der ersten Sekunde 5 m und in jeder folgenden Sekunde 10 m mehr als in der vorhergehenden Sekunde zurück.
a) Welche Strecke legt er in der 13. Sekunde zurück?
b) Welche Strecke fällt er in 13 Sekunden?
c) Wie viele Sekunden braucht er für 1805m?

Geometrische Folgen und Reihen

Die folgenden Folgen sind alles **geometrische** Folgen:

a) 2, 4, 8, 16, 32, ...

b) 27, 9, 3, 1, 1/3, ...

c) –1, 5, - 25, 125, - 625, ...

d) $a_n = 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$

1. Untersuche diese Folgen auf ihre Gesetzmässigkeiten.
2. Kannst Du erklären, wieso diese Folgen **geometrische** Folgen heissen?
3. Stelle eine Formel auf um das n-te Glied einer geometrischen Folge zu berechnen.
4. Bilde nun die geometrische Reihe (Partialsummen). Berechne die Summe. Formel?
5. Betrachte nun die Funktion $n \mapsto a_n$. Beschreibe den Graphen.

Definition:

Berechnung des n-ten Gliedes:

Name:

Graph:

Geometrische Reihe:

Übungen

24. Berechne q und a_8:

a) $a_1 = 64$, $a_2 = 96$ **b)** $a_7 = 100$, $a_{10} = - 12{,}5$

25. Berechne das gesuchte Glied:

a) $a_4 = 27$, $q = 0{,}3$, $a_1 = ?$ **b)** $b_{10} = 2$, $b_{13} = 4$, $b_1 = ?$

26. Wie viele Glieder der GF 1000, 999, ... sind grösser als 1?

27. Wie viele Glieder der GF 15, 16, ... muss man mindestens addieren, wenn ihre Summe grösser als eine Milliarde werden soll?

28. $a_1 = 2$, $s_2 = 8$, $s_6 = ?$

29. Eine GF besteht aus 10 positiven Gliedern, beginnt mit 1 und endet mit 2. Berechne die Summe aller Glieder.

30. a, b, c, d bilden eine wachsende Folge: a, b, c eine GF und b, c, d eine AF. Die Summe des ersten und des letzten Gliedes beträgt 8, die Summe aller vier Glieder 14. Berechne die vier Glieder.

31. Bestimme die Summe folgender geometrischer Reihen:

a) $1 + ½ + ...$ **b)** $1/5 + 1/10 + ...$ **c)** $1/5 – 1/10 + ...$ **d)** $\sqrt{2} + 1/\sqrt{2} + ...$

32. Berechne a_1.

a) $q = 0.75$, $s = 100$ **b)** $q = - 0.75$, $s = 140$

33. Bestimme q.

a) $s_1 = 5$, $s = 6$ **b)** $s_1 = 0.1$, $s = 10'000$

34. Welches ist der grösste Wert, den der Quotient einer unendlichen GF, die mit 4 beginnt, annehmen kann, wenn die Summe aller Glieder 12 nicht übersteigt?

35. Wie viele Glieder der GF 5, 4, ... muss man bei a_1 beginnend, addieren, wenn ihre Summe um höchstens 0,001 vom Grenzwert der Reihe abweichen darf?

36. Ein Käfer startet zu einer Krabbeltour. In der ersten Minute schafft er 1,5 m, dann wird er müder und müder und krabbelt in jeder darauffolgenden Minute nur noch ¾ der vorherigen Strecke.

a) Welchen Weg legt er in der 2., 3. bzw. 10.Minute zurück?
b) Wie weit ist er nach 2 bzw. 5 Minuten?
c) Wie weit kommt er, falls er ewigs krabbeln würde?

37. Paradoxon von Zeno (von Elea, 450 v. Chr., griechischer Philosoph): Achilles läuft mit einer Schildkröte um die Wette. Beim Start hat diese, weil Achilles 100mal so schnell läuft wie sie, einen Vorsprung von 10 m. Wenn Achilles den Startpunkt A der Schildkröte erreicht, ist diese bereits wieder in B, wenn Achilles nach B kommt, ist sie bereits in C usw. Also – so schliesst Zeno – kann Achilles die Schildkröte niemals einholen. Worin liegt der Trugschluss? Nach wie vielen Metern holt Achilles die Schildkröte ein?