Fraktale

Einleitung

„Die Realität ist vielleicht das reinste Chaos."[1]

„1953 erkannte ich, dass die gerade Linie zum Untergang der Menschheit führt.
Aber die gerade Linie ist zur absoluten Tyrannei geworden.
Die gerade Linie ist der Fluch unserer Zivilisation.
Heute erleben wir den Triumph der rationalen Technik, und währenddessen befinden wir uns gleichzeitig vor dem Nichts."[2]

„Das Wort Fraktal[3] wurde von Mandelbrot[4] erfunden, um eine umfangreiche Klasse von Objekten unter einem Begriff zu vereinen, die in der Entwicklung der reinen Mathematik eine historische Rolle gespielt haben ... Eine grosse Revolution der Ideen trennt die klassische Mathematik des 19. Jahrhunderts von der modernen Mathematik des 20. Jahrhunderts. Die Wurzeln der klassischen Mathematik liegen in den regulären geometrischen Strukturen von Euklid und den strengen Dynamiken von Newton. Mit der Mengentheorie von Cantor und den raumfüllenden Kurven von Peano begann dagegen die moderne Mathematik. Historisch wurde die Revolution von der Entdeckung mathematischer Strukturen erzwungen, die nicht in die Muster von Euklid und Newton passten. Diese neuen Strukturen betrachtete man ... als „pathologisch", ... als eine Galerie von Monstern – dem Kubismus[5] und der anatolen Musik[6] verwandt, welche etwa zur selben Zeit die etablierten Geschmacksmassstäbe in der Kunst umstiessen. Die Mathematiker benutzten die von ihnen geschaffenen Monster zum Nachweis, dass der Variantenreichtum der reinen Mathematik weit über die einfachen, in der Natur sichtbaren Strukturen hinausgeht, und die Mathematik des 20. Jahrhunderts lebte im Glauben, die von ihren natürlichen Ursprüngen abgestreckten Grenzen vollständig überschritten zu haben.
Doch ... die Natur hat – wie Mandelbrot herausarbeitet – mit den Mathematikern ihren Spass getrieben. Vielleicht fehlte es den Mathematikern des vorigen Jahrhunderts an Vorstellungskraft, der Natur jedenfalls nicht. Von den gleichen pathologischen Strukturen, die die Mathematiker erfanden, um sich vom Naturalismus des 19. Jahrhunderts zu lösen, erweist sich nun, dass die vertrauten, uns umgebenden Objekte innewohnen."[7]

Die fraktale Geometrie stelle keine direkte Anwendung der Mathematik des 20. Jahrhunderts dar. Sie ist ein neuer Zweig, der verspätet nach der Krise der Mathematik[8] geboren wurde. Diese Krise begann 1875 und dauerte bis ca. 1925. Ihre Hauptakteure waren Cantor, Peano, Lebesque und Hausdorff.

---

[1] Georg Christoph Lichtenberg, Mathematiker und Physiker, 1742 - , Lichtenbergsche Figuren
[2] Friedensreich Hundertwasser, Künstler, 1928 - 2001
[3] frangere (lat.): zerbrechen, unregelmässige Bruchstücke erzeugen
[4] Benoit B. Mandelbrot, Vater der fraktalen Geometrie,
[5] Richtung der modernen Kunst: Cézanne, Braque, Picasso
[6] nicht tonale Musik; A. Schönberg
[7] F.J. Dyson
[8] Reymon du Bois entdeckte eine von Weierstrass konstruierte stetige aber nichtdifferenzierbare Funktion

Grundbegriffe

Iteration
Es wird eine bestimmte Operation ausgeführt, mit dem erhaltenen Resultat wird dann wieder dieselbe Operation ausgeführt, usw. Eine solche Operation nennt man Iteration.

Selbstähnlichkeit
Ein Gebilde heisst selbstähnlich (skaleninvariant), wenn es ähnlich einem Teil von sich selbst ist.

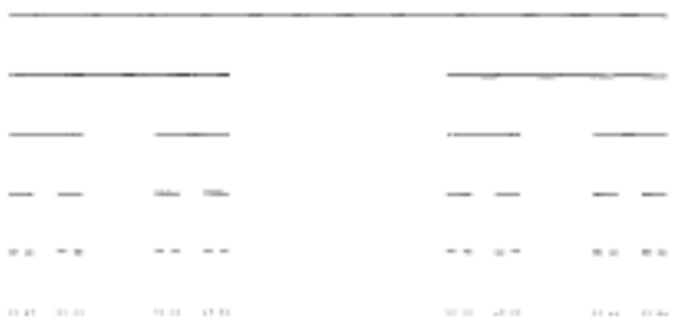
Klassische Fraktale

Cantor – Menge

„Je le vois, mais je ne le crois pas!“[9]

Iteration: Wir starten mit einer Strecke, einem abgeschlossenen Intervall, bsp. [0,1]. Diese wird in drei gleiche Teile geteilt und dann das mittlere offene Intervall herausgewischt. Es verbleiben also nach der ersten Wischung die Intervalle [0,1/3] und [2/3,1]. Mit diesen verfahren wir genau gleich. Nach n Wischungen haben wir 2^n abgeschlossene Intervalle der Länge $\frac{1}{3^n}$.

Wird die Zahl der Wischungen unendlich oft wiederholt (n $\rightarrow \infty$), so bleibt schliesslich eine Menge disjunkter Staubkörner übrig. Die Strecke ist „zerbröselt“. Wir sprechen von einer Limesmenge, vom Cantor-Drittelstaub.



Eigenschaften:

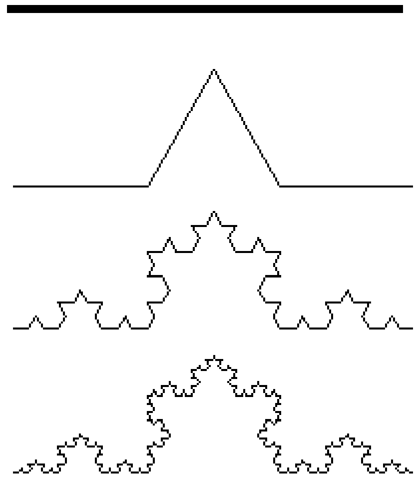
- Die Cantor-Drittelmenge ist selbstähnlich.
- Die Cantor-Drittelmenge ist unabzählbar.
- Die Mächtigkeit der Cantor-Menge entspricht der Mächtigkeit des Intervall [0,1], d.h. der Mächtigkeit des Kontinuums. Bei unserem Wischvorgang wird alles herausgewischt, trotzdem hat die übrigbleibende Menge die Mächtigkeit des Kontinuums. („Alles wird herausgewischt und es bleibt Nichts übrig. Trotzdem ist dieses Nichts so mächtig wie Alles.“)

---
[9] Georg Cantor, 1845 - 1918

Übungen

1. Die Kochkurve

Erzeugung:
Man nehme eine abgeschlossene Strecke,



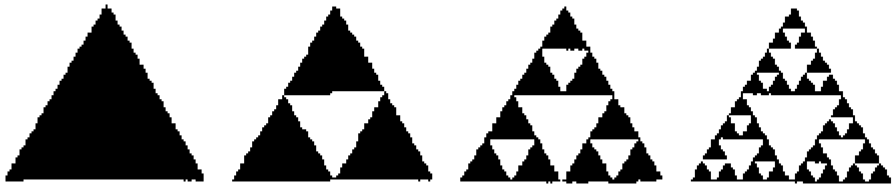
teile sie in drei kongruente Teile, errichte über der mittleren Strecke ein gleichseitiges Dreieck

und wische dann die Grundlinie dieses Dreiecks weg (K1). Mit den verbleibenden Strecken verfahre man auf dieselbe Weise, dies führt zu K2, K3, ...
Wird diese Iteration unendlich oft wiederholt, ergibt sich eine Limesmenge, die Kochkurve.

1. Untersuche die Anzahl Strecken An der Kn.
2. Untersuche die Länge Sn der Strecken.
3. Bestimme die Länge Ln der Kn.
4. Für welches n ist die Länge erstmals grösser als der Aequator?
5. Bestimme die Gesamtlänge der Kochkurve.
6. Was kann man von der Fläche unter der Kochkurve sagen? Berechne sie.

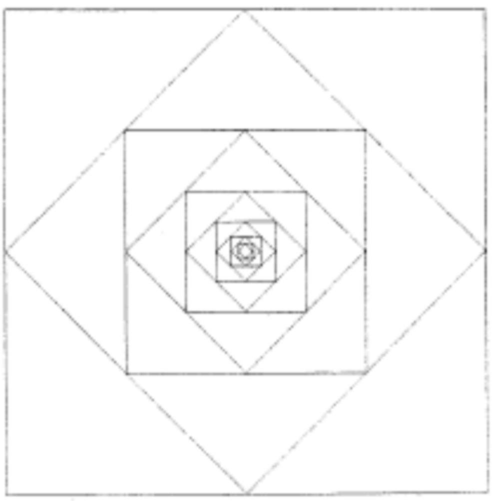
Stufe	Anzahl der Teilstrecken A_n	Länge einer Teilstrecke S_n	Gesamtlänge L_n	Flächeninhalt unter der Kurve
0				
1				
2				
3				
4				

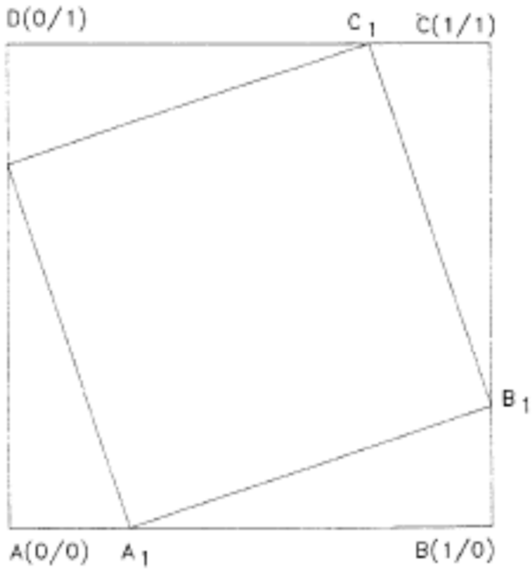
2. Das Sierpinski Dreieck



a) Bestimme den Initiator und den Generator.
b) Bestimme die Anzahl Dreiecke (D_1, D_2,...,D_5) so wie die Längen der dazugehörigen Dreiecksseiten.
c) Gib eine explizite Definition des Flächeninhaltes D_n an.
d) Berechne nun den Gesamtumfang und den Flächeninhalt des Sierpinski Dreiecks. Ist das nicht erstaunlich?

3. Verschachtelte Quadrate:





Im ersten Bild wehen wir eine Schar von kleiner werdenden Quadraten. Zu jedem Quadrat existiert dabei ein einbeschriebenes Folgequadrat. Die Eckpunkte der einbeschriebenen Quadrate liegen jeweils auf den Seitenmittelpunkten ihrer Vorgänger. In Gedanken können wir den Vorgang beliebig oft wiederholen.
Schraffiere die vier grössten Teildreiecke rot und bestimme die Gesamtfläche s_1 dieser Dreiecke. (Kantenlänge des grössten Quadrates sei 1 Längeneinheit).
Bestimme ebenso die Flächen s_2, s_3, s_4, …
Berechne die Summe $s_1 + s_2 + s_3 + \ldots$. Wie gross wird der maximale Wert dieser Summe?

Im zweiten Bild liegen die Eckpunkte des einbeschriebenen Quadrates so, dass die Seiten des grossen Quadrates mit ¼ zu ¾ unterteilt sind. Zeichne weitere Nachfolgequadrate.
Berechne die Koordinaten der Eckpunkte der einbeschriebenen Quadrate.

Alternative: Nimm statt eines Quadrates ein Rechteck und erzeuge zeichnerisch ein Fraktal.

Lösungen

Kochkurve

Stufe	Anzahl der Teilstrecken A_n	Länge einer Teilstrecke S_n	Gesamtlänge L_n	Flächeninhalt unter der Kurve
0	1	1	1	0
1	4	1/3	4/3	$\frac{\sqrt{3}}{36}$
2	16	1/9	16/8	$4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{324}$
3	4^3	1/27	64/27	
4	4^4	1/81	$4^4/3^4$	

1. $A_n = 4^n$
2. $S_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$
3. $L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$
4. $\left(\frac{4}{3}\right)^n = 6.3782 \cdot 10^8$ n = 102.5, d.h. ab n = 103
5. Die Länge wird unendlich gross
6. $\frac{\sqrt{3}}{36} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{324} + 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{36 \cdot 9^2} + \ldots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\sqrt{3}}{20}$

Das Sierpinski Dreieck

b) $D_1 = 1$, $D_2 = 3$, $D_3 = 3^2$, ..., $D_n = 3^{n+1}$

$L_1 = 1$, $L_2 = ½$, $L_3 = ¼$, ..., $L_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) $F_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $F_2 = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot F_1$, $F_3 = 3^2 \cdot \frac{1}{4^2} \cdot F_1$, ..., $F_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \frac{\sqrt{3}}{4}$

d) F = 0 und $U \to \infty$

Verschachtelte Quadrate

$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$