Finanzmathematik

Finanzmathematik ist eine Disziplin der angewandten Mathematik, die sich mit Themen aus dem Bereich von Finanzdienstleistern, wie etwa Banken oder Versicherungen, beschäftigt.

„Die Finanzmathematik befindet sich heute in stürmischer Entwicklung. Ausgehend von den klassischen Gebieten der Finanzmathematik, der Zins- und Zinseszinsrechnung sowie der Renten-, Tilgungs- und Kursrechung, die vorwiegend im Zusammenhang mit festverzinslichen Wertpapieren von Interesse sind, haben sich zahlreiche eigenständige und mathematisch anspruchsvolle Gebiete entwickelt. So gibt es vielfältige Methoden zur Bewertung von Aktien und zur Prognose von Aktienkursen. Weiterhin ergeben sich sehr interessante, oftmals aber komplizierte Fragestellungen in Verbindung mit der Preisbestimmung sogenannter Derivate (Optionen, Futures, Aktienanleihen, etc.), die vor allem im Investment Bankin eine wichtige Rolle spielen. Nicht zuletzt bildet die klassische Finanzmathematik die Grundlage für das weite Feld der Versicherungsmathematik und für das Bausparen…
Von den Teilgebieten her umfasst die Finanzmathematik traditionell die Zins- und Zinseszinsrechnung, die Renten-, Tilgungs- und Kursrechnung; zu Abschreibungen und Investitionsmethoden bestehen enge Beziehungen.
Im Zinssatz konzentriert sich alles, was relevant ist. Nicht oder nur indirekt erfasst werden dagegen solche Aspekte wie Risiko (nicht jeder Kredit wird pünktlich oder überhaupt bezahlt), Emotionen („lieber weniger Bares sofort als eine höhere Zahlung in etlichen Jahren“), Inflation (eine bestimmte Geldmenge hat heute einen anderen, höheren Wert als in mehreren Jahren). All diese Aspekte finden letztlich Ausdruck im Zinssatz. Ferner spielt die Liquidität (Zahlungsfähigkeit) keine Rolle in der klassischen Finanzmathematik: Beim Vergleich verschiedener Anlage- oder Zahlungsvarianten wird stets davon ausgegangen, dass die entsprechenden Zahlungen tatsächlich auch jederzeit möglich sind….
Über den Rahmen der klassischen Finanzmathematik hinaus gehen schliesslich stochastische Aspekte, die ihren Niederschlag vor allem in der Versicherungsmathematik, aber auch bei der Prognose von Kursen für Aktien, Wertpapiere, Optionen und anderer Derivate finden.“ [Vorwort aus Starthilfe Finanzmathematik, Bernd Luderer]

Wir wollen uns den Zusammenhang zwischen Finanzmathematik und Folgen und Reihen vor Augen führen. Dazu müssen zuerst einige Begriffe definiert und erklärt werden:

K_0 : Anfangskapital
K_n : Kapital nach n Jahren
p : Jahreszinssatz in Prozent
n : Laufzeit in Jahren
Z : Zins

Wir gehen bei davon aus, dass ein Kapital K jährlich mit dem Zinsatz p verzinst wird. Am Ende eines Kalenderjahres (360 Tage) wird dieser Zins zum Kapital addiert. Beträgt die Laufzeit t nur ein paar Monate (30 Tage), wird der Jahreszins entsprechend der Anzahl Monate umgerechnet.

Einfache Zinsrechnung Zinsformel: $Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100}$

Zinseszinsrechnung Zinseszins: $K_n = K_0 (1 + \frac{p}{100})^n$

Übungen Finanzmathematik

1. Zinseszins

a) Zu welchem Zinssatz müsste man ein Kapital anlegen, damit es sich in fünf Jahren verdoppelt?

b) Welchen Betrag muss man (mit Zinseszins, Zinssatz 4 %) heute anlegen, damit man in zehn Jahren 10'000 Fr. hat?

c) Verdeutliche, dass die Formel K_n = $K_0 (1 + \frac{p}{100})^n$ eine geometrische Folge definiert.

2. Ratenkreditgeschäfte

Du hast einen Kleinkredit von Fr. 12'000.- aufgenommen. Diese Schuld willst Du in drei gleich grossen jährlichen Raten begleichen. Wie gross sind diese Raten bei einem für Kleinkredite üblichen Zinsfuss von 12 %?

3. Ratensparen

a) Du legst immer am Anfang eines Monats Fr. 200.- auf die Bank. Das erste Mal am 1.1.2006. Was für einen Betrag erhältst Du nach 8 Jahren, wenn die Bank mit einem Zinsfuss von 3.5 % rechnet? (Hinweis: Untersuche zuerst die Entwicklung während eines Jahres)

b) Welchen Betrag muss jemand 10 Jahre lang jeweils zu Jahresbeginn auf ein Konto einzahlen, um am Ende des zehnten Jahres eine Summe von Fr. 100'000.- auf dem Konto zu haben, wenn man einen Zinssatz von 3% zugrunde legt?

c) Wie oft kann von diesen Fr. 100'000.- jeweils zu Jahresanfang Fr. 5'000.- abgehoben werden, wenn der Zinssatz weiterhin 3 % beträgt?

4. Alimente

Ein Vater ist verpflichtet, für seine Tochter, die bei ihrer Mutter lebt, jeweils am Monatsende Fr. 600.- als Alimente zu bezahlen. Von dieser 12 Jahre dauernden Verpflichtung möchte er sich durch eine einmalige Barzahlung am Anfang loskaufen. Wie gross ist diese bei einem Zinsfuss von 5 %?

Lösungen

Aufgabe 1:

a) $2 \cdot K_o = K_o \cdot (1 + \frac{p}{100})^5$ p = <u>14.87 %</u>

b) $10'000 = K_o \cdot (1 + \frac{p}{100})^{10}$ K_o = <u>6'755.65 Fr.</u>

c) $a_1 = K_0$, $q = (1 + \frac{p}{100})$

Aufgabe 2:

x : Rate $0 = 12'000 \cdot 1.12^3 - x(1.12^2 + 1.12 + 1)$ x = <u>4996.20 Fr.</u>

Aufgabe 3:

a) Entwicklung während eines Jahres mit Jahreszins 200*0.035 = 7

$12 \cdot 200 + 7 + 7 \cdot \frac{11}{12} + 7 \cdot \frac{10}{12} + \ldots + 7 \cdot \frac{1}{12} = 12 \cdot 200 + 6 \cdot (7 + 7 \cdot \frac{1}{12}) = 2'445.50$ Fr.

(Arithmetische Reihe)

Während 8 Jahre:

$2'445.50 \cdot 1.035^7 + 2'445.50 \cdot 1.035^6 + \ldots + 2'445.50 \cdot 1.035 + 2'445.50 =$

$2'445.50 \cdot (1 \cdot \frac{1-1.035^8}{1-1.035}) =$ <u>22'135.90 Fr</u>. (Geometrische Reihe)

b) $K_0 \cdot 1.03^{10} + K_o \cdot 1.03^9 + \ldots + K_o \cdot 1.03 = K_0 \cdot 1.03 \cdot \frac{1-1.03^{10}}{1-1.03} = 100'000$

K_o = <u>8468.98 Fr.</u>

c) $K_0 = 100'000$
$K_1 = (100'000 - 5'000) \cdot 1.03$
$K_2 = (K_1 - 5'000) \cdot 1.03 = 100'000 \cdot 1.03^2 - 5'000 \cdot 1.03^2 - 5'000 \cdot 1.03$

.... $K_n = 100'000 \cdot 1.03^n - 5'000 \cdot (1.03 \cdot \frac{1-1.03^n}{1-1.03}) = 0$ n = 29.5522 (<u>29 Jahre</u>)

Aufgabe 4:

1 Jahr:

$600 \cdot 12 + (30 \cdot \frac{11}{12} + \ldots + 30 \cdot \frac{1}{12} + 0) = 600 \cdot 12 + 6 \cdot (30 \cdot \frac{11}{12} + 0) = 7'365$ Fr. (AR)

Während 12 Jahren:

$7'365 \cdot (1.05^{11} + 1.05^{10} + 1.05 + 1) = 7'365 \cdot 1 \cdot \frac{1-1.05^{12}}{1-1.05} = 117'229.65$ Fr. (GR)

Kapital K_p heute, so dass es in 12 Jahren zu 5 % verzinst 117'229.65 Fr. ergibt:

$K_o \cdot 1.05^{12} = 117'229.657$ K_o = <u>65'277.85 Fr.</u>