

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Fibonacci, Leonardo von Pisa, lebte von 1170 - 1240. Auf Reisen mit seinem Vater in Nordafrika lernte Leonardo das Rechnen mit indischen Ziffern kennen. Er sammelte viele Übungsbeispiele, auch aus dem Bereich der Gleichungslehre. Mit seinem Hauptwerk Liber Abaci (1202) führt er die indisch-arabischen Ziffern in Europa ein. Er gehörte zum Gelehrtenkreis um Kaiser Friedrich II.



Bereits 1202 entstand die Fibonacci-Folge, für die er auch heute noch sehr bekannt ist:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$

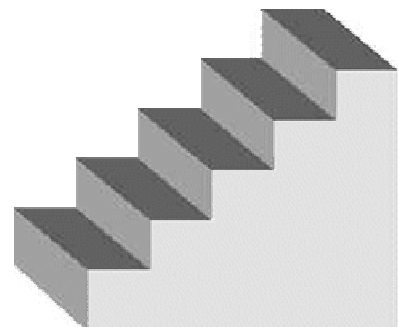
In seinem Buch Liber Abaci ist folgendes Beispiel zu lesen (das berühmte Kaninchen-Problem):

Ein Kaninchenpaar wirft vom zweiten Monat an ein junges Paar und in jedem weiteren Monat ein weiteres Paar. Die Nachkommen verhalten sich ebenso. Gehen wir von einem Kaninchenpaar aus. Untersuche, wie sich die Anzahl der Kaninchenpaare entwickelt.

Monat							
Anzahl Paare							

Weiteres Beispiel: Treppensteigen.

Bei jeder Stufe kann man sich die Frage stellen: Nehme ich eine Stufe oder überspringe ich eine Stufe. Die erste Stufe muss auf jeden Fall betreten werden. Auf wie viele verschiedene Arten kann man nun die Treppe hinaufgehen?

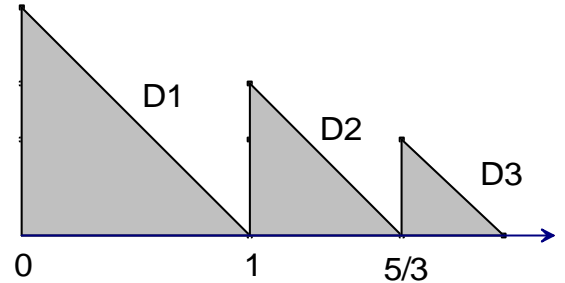


Geometrische Folgen und Reihen in geometrischen Anwendungen

1. Eine Aufgabe mit Dreiecken

Die Kanten der gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreiecke D_i bilden eine geometrische Folge:

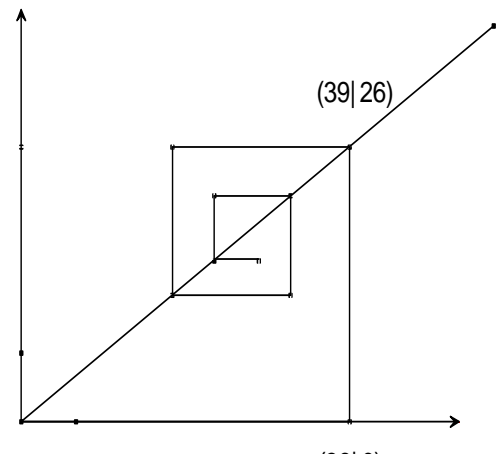
- Berechne die Flächeninhalte von D_1, D_2, D_3 und verallgemeinere für D_n .
- Denke Dir die Folge der Dreiecke unendlich lange fortgesetzt. Welchen Flächeninhalt F haben alle Dreiecke insgesamt?
- Wie viele Dreiecke müssen mindestens berücksichtigt werden, damit sich die Summe ihrer Flächeninhalte um weniger als 0.0001 von F unterscheidet?



2. Ein spiralförmiger Weg

In der nebenstehenden Skizze siehst du einen spiralförmigen Weg aus unendlich vielen Strecken, der im Ursprung beginnt. Die einzelnen Streckenlängen bilden eine geometrische Folge.

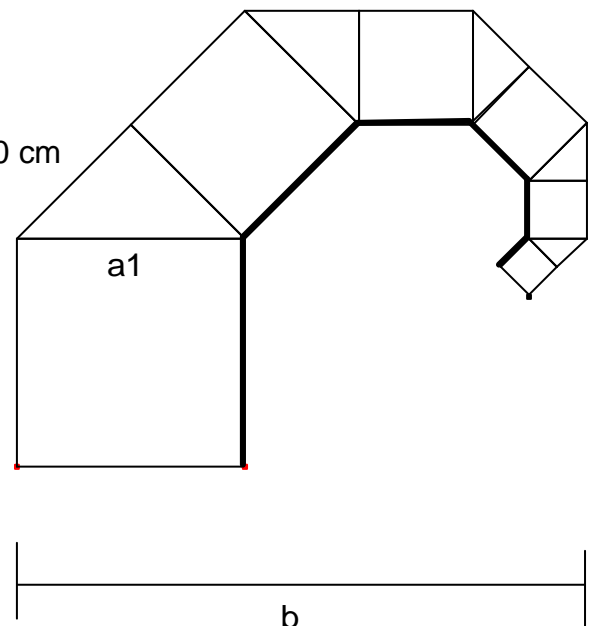
- Berechne die gesamte Länge des Weges.
- Berechne die Koordinaten des Zielpunktes.
- Wie viele Streckenlängen müssen addiert werden, um eine Gesamtlänge von mindestens 100 LE zu erreichen?



3. Eine Spirale

Die nebenstehende Figur entsteht wie folgt: Dem Ausgangsquadrat mit der Seitenlänge $a_1 = 10$ cm wird ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck aufgesetzt. Über der einen Kathete des Dreiecks wird ein Quadrat errichtet, u.s.w. Dieser Ansetzungsprozess wird unendlich oft durchgeführt.

- Berechne die Seitenlänge des zweiten, dritten und vierten Quadrates.
- Berechne den gesamten Flächeninhalt der Figur.
- Berechne die Breite b der Figur.
- Berechne die Gesamtlänge l der fett eingezeichneten Spirale.



Lösungen

Das Kaninchenproblem:

Monate	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl Paare	1	2	3	5	8	13	21

Treppensteigen

Anzahl Stufen	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl Möglichkeiten	1	1	2	3	5	8	13

1. Eine Aufgabe mit Dreiecken

$$\text{a) } D_1 = \frac{1}{2}, D_2 = \frac{2}{9}, D_3 = \frac{8}{81}, \dots, D_n : D_1 = \frac{1}{2}, D_{n+1} = D_n * \frac{4}{9}$$

$$\text{b) } A = \frac{0.5}{1 - \frac{4}{9}} = 0.9 E^2 \quad \text{c) } 0.8999 = 0.5 * \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = 11.23, \text{ d.h. mindestens } 12$$

2. Ein spiralförmiger Weg

$$\text{a) } a_1 = 39, q = 2/3: s = 117$$

$$\text{b) } Z(27 | 18)$$

$$\text{c) } \text{mindestens } 5$$

3. Eine Spirale

$$\text{a) } a_1 = 10, a_2 = 5\sqrt{2}, a_3 = 5, a_4 = \frac{5\sqrt{2}}{2}, \dots, a_n = 10 * \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

$$\text{b) } \text{Flächeninhalte der Quadrate: } 10^2 + (5\sqrt{2})^2 + 5^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \dots = \frac{100}{1-0.5} = 200$$

$$\text{Flächeninhalte der Dreiecke: } \frac{(5\sqrt{2})^2}{2} + \frac{5^2}{2} + \frac{\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} + \dots = \frac{(5\sqrt{2})^2}{1-0.5} = 50$$

$$\text{Flächeninhalt der gesamten Figur: } \underline{250 E^2}$$

$$\text{c) } a_1 + a_2 + a_4 + \text{Diagonale}(a_5) = 10 + 5 + 5 + 5 = \underline{25 E}$$

$$\text{d) } l = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{10}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \underline{34.1421 E}$$