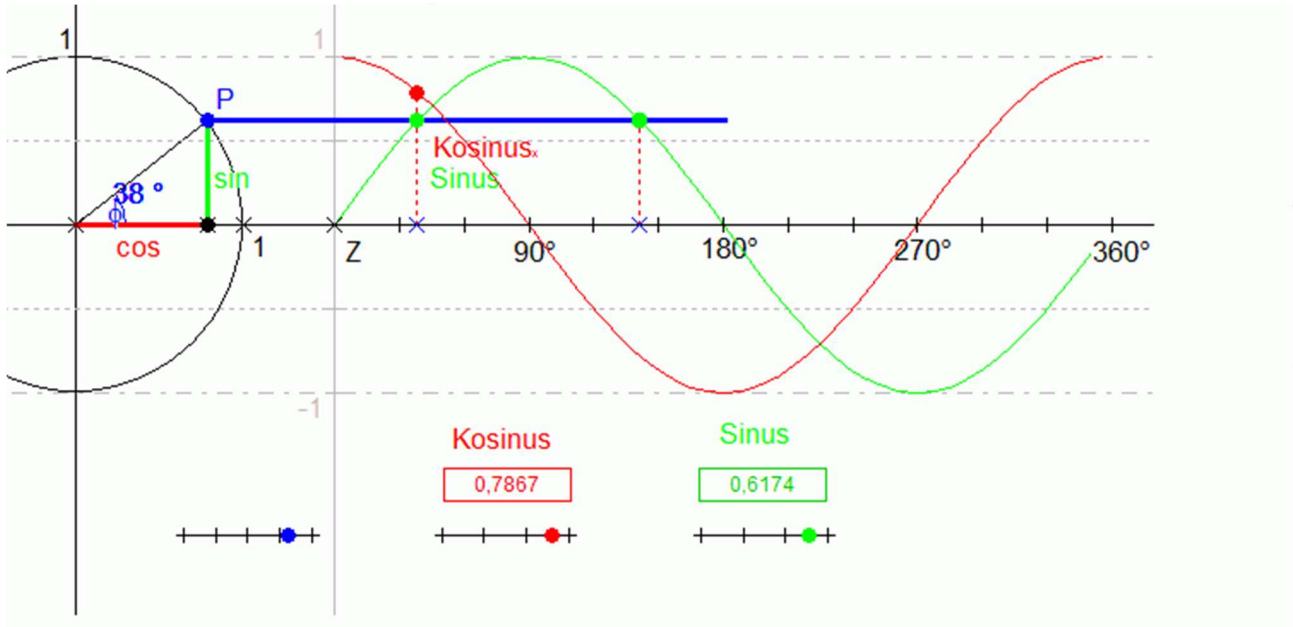
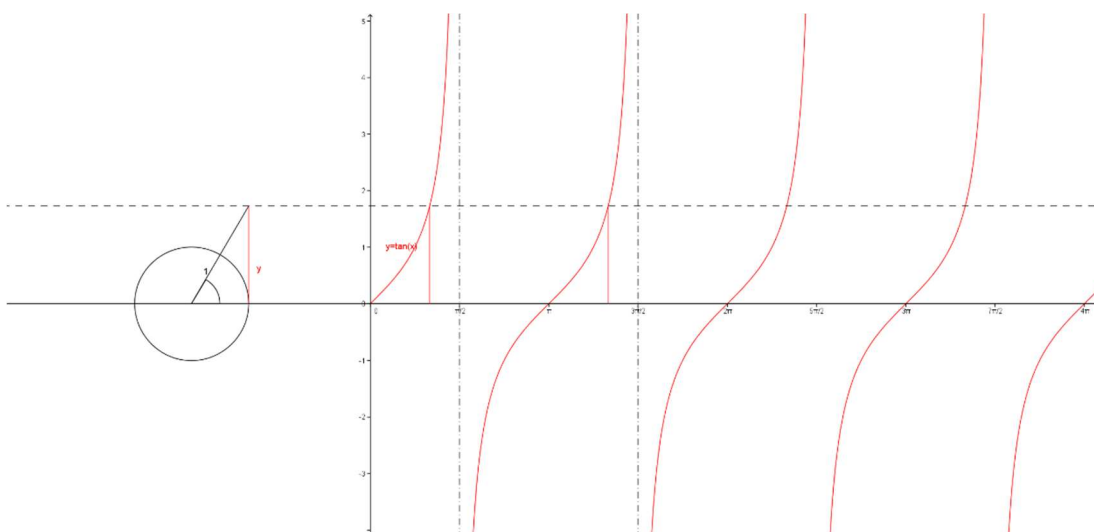


Die Trigonometrischen Funktionen

Darstellung der Sinusfunktion und Cosinusfunktion am Einheitskreis

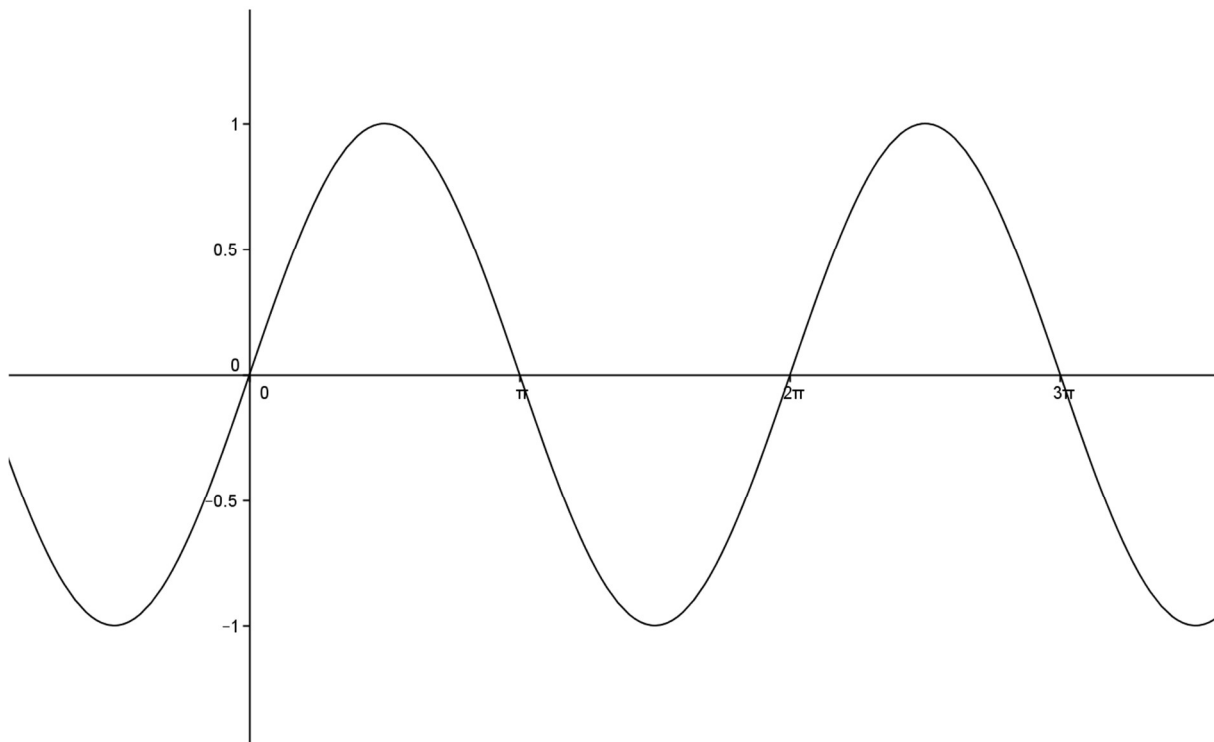


Darstellung der Tangensfunktion am Einheitskreis



Eigenschaften der Sinus- und Kosinus- und Tangensfunktion ($k \in \mathbb{Z}$)

	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
Definitionsbereich	$D = \mathbb{R}$	$D = \mathbb{R}$	$D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\}$
Wertebereich	$W = [-1, 1]$	$W = [-1, 1]$	$W = \mathbb{R}$
Periode	2π	2π	π
Symmetrie	ungerade	gerade	ungerade
Nullstellen	$k \cdot \pi$	$\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$	$k \cdot \pi$
Relative Maxima	$\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$	$k \cdot 2\pi$	-
Relative Minima	$\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$	$\pi + k \cdot 2\pi$	-
Polstellen	-	-	$\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

Einfache Gleichungen und Anzahl Lösungen

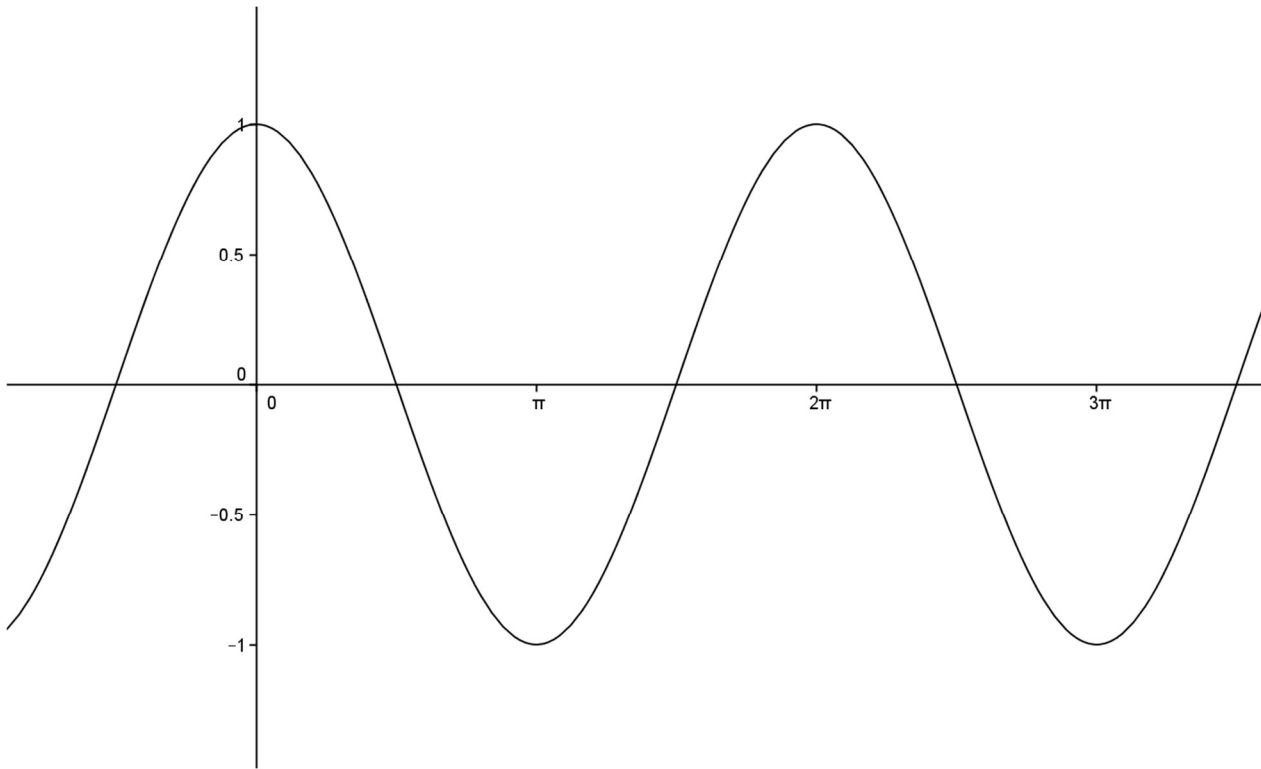
Ermittle jeweils die Grösse des Winkels x für das Intervall $[0, 360^\circ]$

1. $\sin(x) = 0.8$
2. $\sin(x) = -0.8$
3. $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\sin(x) = 0$
5. $\sin(x) = 1$
6. $\sin(x) = -1$

Lösungen

1. 0.93 / 2.21
2. 4.07 / 5.36
3. $\pi/3$ / $2/3 \pi$

4. 0 / π / 2π
5. $\pi/2$
6. $3/2 \pi$



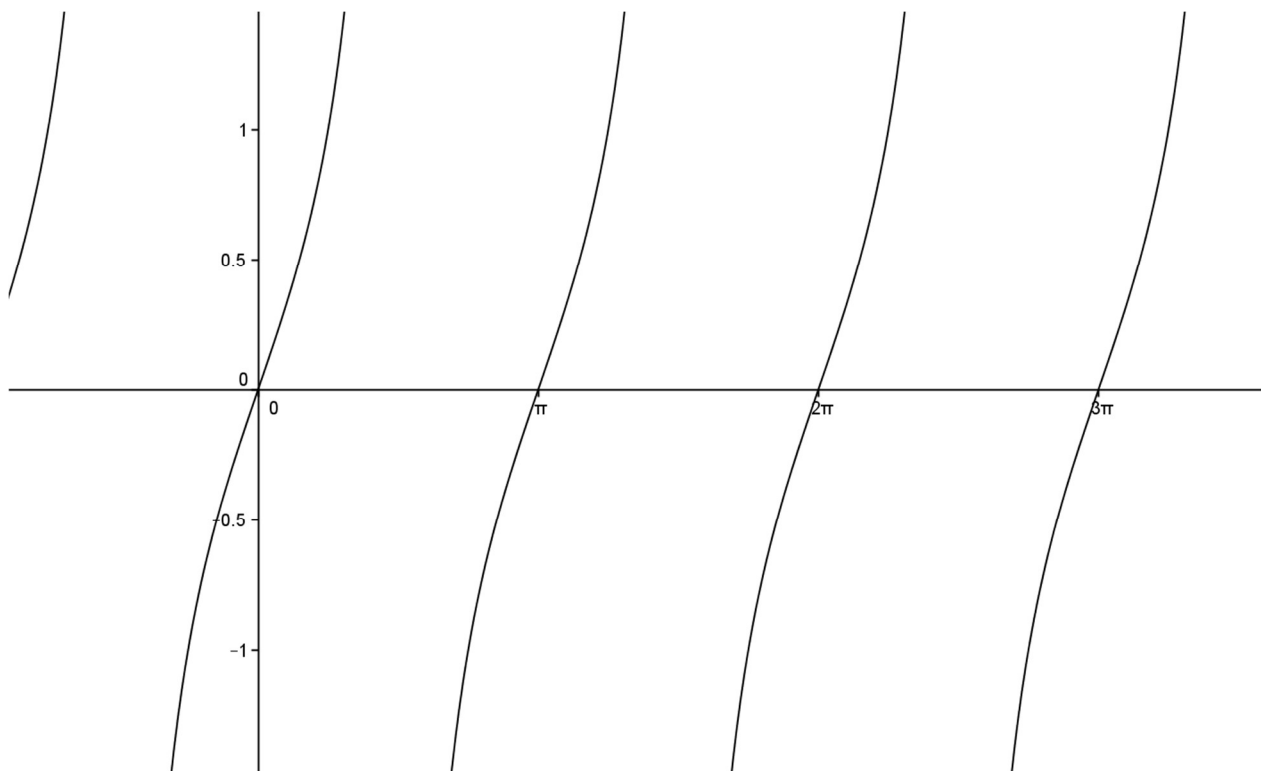
Ermittle jeweils die Grösse des Winkels x für das Intervall $[0, 360^\circ]$

1. $\cos(x) = 0.8$
2. $\cos(x) = -0.8$
3. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\cos(x) = 0$
5. $\cos(x) = 1$
6. $\cos(x) = -1$

Lösungen

1. 0.65 / 5.64
2. 2.5 / 3.79
3. $\pi/6$ / $11/6 \pi$

4. $\pi/2$ / $3/2 \pi$
5. 0 / 2π
6. π



Ermittle jeweils die Grösse des Winkels x im Intervall $[0, 2\pi]$

1. $\tan(x) = 0.8$
2. $\tan(x) = -0.8$
3. $\tan(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\tan(x) = 0$
5. $\tan(x) = 1$
6. $\tan(x) = -1$

Lösungen

1. 0.65 / 3.82
2. 2.47 / 5.61
3. 0.71 / 3.86

4. 0 / π / 2π
5. $\pi/4$ / $5/4\pi$
6. $3/4\pi$ / $7/4\pi$

Die allgemeine Sinus- und Cosinusfunktion

$$y = a \cdot \sin(bx + c) + d \quad \text{bzw.} \quad y = a \cdot \cos(bx + c) + d$$

Bedeutung der Parameter :

a : Die Kurve wird in y-Richtung gedehnt oder gestaucht (Amplitude)

b : die Periode wird verändert zu : Periode $p = 2\pi/b$

c : Verschiebung der Kurve längs der x-Achse

d : Verschiebung der Kurve längs der y-Achse

1. Stelle grafisch dar im Bereich $[0, 2\pi)$:

a. $y = 2\sin(x)$

b. $y = 0.5\sin(x)$

c. $y = -2\sin(x)$

d. $y = \sin(2x)$

e. $y = \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$

f. $y = \cos(x + \pi)$

g. $y = \cos(2x) + 1$

h. $y = 2\sin(x - \pi/2)$

i. $y = 0.5\cos(x) - 2$

j. $y = 2\cos(2x) + 1$

k. $y = -[\sin(x + \pi) + 1]$

2. Berechne jeweils die Nullstellen.

3. Bestimme jeweils den Wertebereich.

Lösungen

a $0, \pi, 2\pi$

W = $[-2, 2]$

b $0, \pi, 2\pi$

W = $[-0.5, 0.5]$

c $0, \pi, 2\pi$

W = $[-2, 2]$

d $0, \pi/2, \pi, 3/2\pi, 2\pi$

W = $[-1, 1]$

e 0

W = $[-1, 1]$

f $\pi/2, 3/2\pi$

W = $[-1, 1]$

g $\pi/2, 3/2\pi$

W = $[0, 2]$

h $\pi/2, 3/2\pi$

W = $[-2, 2]$

i keine

W = $[-2.5, -0.5]$

j $\pi/3, 2/3\pi, 4/3\pi, 5/3\pi$

W = $[-1, 3]$

k $3/2\pi$

W = $[-2, 0]$

Lösen von Gleichungen im Intervall $[0^\circ, 360^\circ]$ bzw. $[0, 2\pi]$

1. $\sin(x) = 0.5$
2. $2 \cdot \sin(x) = -0.5$
3. $0.5 \cdot \sin(x) = 0.5$
4. $-2 \cdot \sin(x) = 0.5$
5. $\sin(4x) = 0$
6. $\sin(2x) = 0.5$

7. $\cos(x) = -0.3$
8. $2 \cdot \cos(x) = 0.3$
9. $0.5 \cdot \cos(x) = -0.3$
10. $-2 \cdot \cos(x) = 0.3$
11. $\cos(3x) = -0.5$
12. $\cos(2x) = 0.5$
13. $\cos(0.5x) = 0.4$

14. $\tan(x) = 0.5$
15. $\tan(x) = -0.5$
16. $\tan(2x) = -4$
17. $\tan(x + 2) = -3$
18. $2 \cdot \tan(3x) = 1$

Lösungen

- | | |
|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| 1. $\pi/6 / 5/6\pi$ | 10. 1.72 / 4.56 |
| 2. 3.39 / 6.03 | 11. 0.7 / 1.4 / 2.8 / 3.5 / 4.9 / 5.6 |
| 3. $\pi/2$ | 12. $\pi/6, 5/6\pi, 7/6\pi, 11/6\pi$ |
| 4. 3.39 / 6.03 | 13. 2.31 |
| 5. 0, $\pi/4, \pi/2, 3/4\pi, \pi, 5/4\pi, 3/2\pi, 7/4\pi, 2\pi$ | 14. 0.46 / 3.61 |
| 6. $\pi/12$ | 15. 2.68 / 5.82 |
| 7. 1.88 / 4.41 | 16. 0.91 / 2.48 / 4.05 / 5.62 |
| 8. 1.42 / 4.86 | 17. 3.02 / 6.18 |
| 9. 2.21 / 4.07 | 18. 0.15 / 1.20 / 2.25 / 3.3 / 4.34 / 5.39 |

Schwierigere Gleichungen

Bekannte Formeln :

- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Bekannte Lösungsverfahren :

- Quadratische Gleichungen
- Faktorisieren
- Substitution

1. $\sin(x) = -\cos(x)$
2. $0 = \sin(x) - \cos(x)$
3. $0 = 2 \cdot \sin(x) - \cos(x)$
4. $0 = \sin(2x) + \sin(x)$
5. $0 = 0.5 \cdot \sin(x) + 3 \cdot \cos(x)$
6. $2 \cdot \cos^2(x) - 7 \cdot \cos(x) + 3 = 0$
7. $\sin^2(x) - 3 \cdot \cos^2(x) = 1$
8. $\sin(x) + \cos(x) = \frac{1}{\cos(x)}$
9. $\cos(2x) = 3 \cdot \cos(x) - 2$
10. $\cos(x) + \cos(2x) = 0$
11. $2(1 - \cos(2x)) = 3 \cdot \sin(2x)$
12. $\sin^2(x) - 6 \cdot \cos^2(x) + \sin(x)\cos(x) = 0$

Lösungen

- | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|
| 1. $3/4\pi, 7/4\pi$ | 8. $0, \pi/4, \pi, 5/4\pi, 2\pi$ |
| 2. $\pi/4, 5/4\pi$ | 9. $0, \pi/3, \pi, 5/3\pi, 2\pi$ |
| 3. $0.46, 3.61$ | 10. $\pi/3, \pi$ |
| 4. $0, 2/3\pi, \pi, 5/3\pi, 2\pi$ | 11. $0, 0.98, \pi, 4.12, 2\pi$ |
| 5. $1.74, 4.88$ | 12. $1.11, 1.89, 4.25, 5.03$ |
| 6. $\pi/3, 5/3\pi$ | |
| 7. $\pi/2, 3/2\pi$ | |