Gleichungen 2. Grades oder Quadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

heisst quadratische Gleichung oder Gleichung 2. Grades. Sie kann maximal zwei Lösungen haben.

Wie können diese Gleichungen gelöst werden:

- **Reinquadratische Gleichungen**

Hat eine Gleichung nur die Form $x^2 = a$, ziehen wir auf beiden Seiten die Wurzel und erhalten so unsere Lösungen.

Bsp.: $x^2 = 17$ $\qquad x_{1/2} = \pm\sqrt{17}$

- **Linearfaktorzerlegung**

Sind x_1 und x_2 die Lösungen von $ax^2 + bx + c = 0$, so gilt $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

Können wir also $ax^2 + bx + c = 0$ faktorisieren, finden wir die gesuchten Lösungen durch Nullsetzen der Klammern.

Bsp.:

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x - 2)(x - 3) = 0$ $\qquad x_1 = 2$ und $x_2 = 3$

- **Quadratisches Ergänzen**

Dieses Lösungsverfahren funktioniert immer, ist aber nicht immer der einfachste Weg.

Vorgehen:	$x^2 + 2bx = c$	Bsp:	$x^2 + 4x = 5$
	$(x + b)^2 - b^2 = c$		$(x + 2)^2 - 4 = 5$
	$(x + b)^2 = c + b^2$		$(x + 2)^2 = 9$
	$(x + b) = \pm\sqrt{c + b^2}$		$x + 2 = \pm 3$
	$x_{1/2} = \pm\sqrt{c + b^2} - b$		$x_1 = 1,\ x_2 = -5$

- **Lösungsformel**

Mit der Lösungsformel können wir nicht nur in jedem Fall die möglichen Lösungen berechnen, sondern wir haben auch ein Hilfsmittel um abzuklären, wie viele Lösungen unsere Gleichung eigentlich hat.

Die Lösungen ergeben sich aus:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die Anzahl der Lösungen können wir mit der Diskriminante ($D = b^2 - 4ac$) bestimmen:

2 Lösungen: $D > 0$

1 Lösung: $D = 0$

0 Lösungen: $D < 0$

Bsp.: $2x^2 - 3x - 5 = 0$ $\qquad x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4\cdot 2\cdot(-5)}}{2\cdot 2} = \begin{matrix} 2.5 \\ -1 \end{matrix}$

Wurzelgleichungen

Bei Wurzelgleichungen steht die Variable immer unter einer Wurzel.

Lösungsverfahren:

1. Die Wurzel wird auf einer Seite der Gleichung isoliert. (Falls mehrere Wurzelterme vorhanden sind, beginnen wir mit einem beliebigen Wurzelterm.)
2. Die Gleichung wird auf beiden Seiten quadriert. (Aufpassen: Quadrieren von Summen!)
3. Ist jetzt immer noch ein Wurzelterm vorhanden, beginnen wir wieder mit Schritt 1.
4. Sind alle Wurzelterme weg, wird die Gleichung nach x aufgelöst.
5. Alle erhaltenen Lösungen müssen in der ursprünglichen Gleichung überprüft werden, da durch das Quadrieren zusätzliche falsche Lösungen entstehen können. (Weil $2^2 = (-2)^2$)

Beispiel:

$\sqrt{x+2} = x - 4$

$x + 2 = (x - 4)^2$

$x + 2 = x^2 - 8x + 16$

$0 = x^2 - 9x + 14$

$0 = (x - 2)(x - 7)$

$x_1 = 2$, Kontrolle: $\sqrt{4} = 2 - 4$ falsch
$x_2 = 7$, Kontrolle: $\sqrt{9} = 3$ richtig

x= 7 ist die einzige Lösung der Wurzelgleichung.