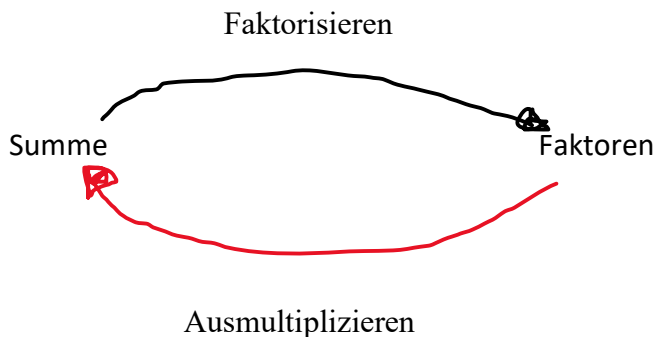


Faktorisieren

Bekannt: Bilde aus Faktoren eine Summe: Ausmultiplizieren (Distributivgesetz)

Neu: Zerlegung von Summen in Faktoren: Faktorisieren.
Die Summe wird so weit wie möglich in Faktoren zerlegt (vollständig faktorisieren).



Beispiel: $ax + ay = a(x + y)$

Vorgehen :

1. Kann ich ausklammern?
2. (-1) ausklammern?
3. Ausklammern in Teilsummen
4. Gibt es Quadratzahlen?
 - a. Binome (2 Quadratzahlen)
 - b. Pseudobinome (nur eine Quadratzahl)
5. Überprüfen der entstandenen Faktoren, ob weiter faktorisiert. Start bei Nr. 1
6. Ziel: Vollständig faktorisieren!

1. Kann ich ausklammern?

- | | | |
|------------------------|-----------------------|------------------------------|
| 1. a) $4x + 4y$ | b) $6p - 6q$ | c) $4r + 12s$ |
| d) $4u - 6v$ | e) $15m - 18m$ | f) $111g - 74h$ |
| 2. a) $pq + qr$ | b) $pq - qr$ | c) $p^2 - pq$ |
| d) $x^2 + 2x$ | e) $a^2 - a$ | f) $5b + 5$ |
| 3. a) $5ax + 5bx$ | b) $7by - 14bz$ | c) $24p^2 + 16pq$ |
| d) $20u^2 - 55u$ | e) $65e + 78e^2$ | f) $42z^3 + 78z^2$ |
| g) $49r^3 - 39r$ | h) $34y^4 + 17y^2$ | i) $9ax + 57ax^2$ |
| 4. a) $5x - 10y + 15z$ | b) $54u + 81v + 108w$ | c) $68p + 187q - 51r - 119s$ |
| d) $ax - bx - cx$ | e) $uv - u^2 + uw$ | f) $p^2 - pq + pr - p$ |

2. (-1) ausklammern

5. Klammere (-1) aus:

- | | | |
|----------------------|---------------------|--------------------|
| a) $-x - y$ | b) $-2p + q$ | c) $4a - 3b$ |
| d) $6u + 5v$ | e) $-c + 1$ | f) $3y^2 - 5z^2$ |
| g) $-16a - 21$ | h) $-12m + n$ | i) $-8a + 4b - 7c$ |
| k) $-2x^2 - 15x + 9$ | l) $4.5y + z - 0.8$ | |

3. Ausklammern in Teilsammen

- | | | |
|---|---|-------------------------------|
| 6. a) $(x + y)p + (x + y)q$ | b) $x(a + b) - (a + b)y$ | c) $a(m - n) + 2(m - n)$ |
| d) $n(y + z) - (y + z)$ | e) $4(p - q) + (p - q)$ | f) $(v + w) + k(w + v)$ |
| g) $3a(c - d) - 6b(c - d)$ | h) $16p(x + 5) - 24q(x + 5)$ | i) $3x(6a - 9b) + 2(6a - 9b)$ |
| k) $2a(5v + 10w) + 4b(10w + 5v)$ | | |
| l) $24x^2y(2a - b) + 18xy^2(2a - b)$ | | |
| m) $52a^3b^2(3x + 6y) - 78ab^4(3x + 6y)$ | | |
| n) $66pq(m - 1) + 102qr(m - 1) - 48pr(m - 1)$ | | |
| o) $85x^2y^3(15a - 9b) + 102xy^4(15a - 9b) - 136x^3y^2(15a - 9b)$ | | |
| 7. a) $p(x + y) + x + y$ | b) $a(u + v) - u - v$ | c) $k(a - b) - a + b$ |
| d) $c(p - q) + q - p$ | e) $b(y - z) - (z - y)$ | f) $m(r - s) - n(s - r)$ |
| g) $2x(a - b) + 3y(b - a)$ | h) $3a(4p - 6q) - b(6q - 4p)$ | |
| i) $9c(8x - 12y) + 3d(12y - 8x)$ | | |
| k) $105ab(s - t) - 60bc(t - s) - 165bd(s - t)$ | | |
| 8. a) $(2a - b)(x + y) + 3a(x + y)$ | b) $(5m + 6n)(a - b) - 4n(a - b)$ | |
| c) $(8a - 5b)(u + v) + 3a(u + v) + 4b(u + v)$ | | |
| d) $(8a - 5b)(u + v) + (3a + 4b)(u + v)$ | e) $(7p + 9q)(x - y) + (5p - 6q)(x - y)$ | |
| f) $(11a - 15b)(3x + y) + (5a - b)(3x + y)$ | | |
| g) $(8c + 12d)(u - 2v) - (7c - 2d)(u - 2v)$ | | |
| h) $(2a - b)(x + y) - (a - b)(2x + 2y)$ | i) $(5m + 7)(3x - 3y) + (3 - m)(5x - 5y)$ | |

9. a) $(2x + 2y)(2x - 2y)$ b) $(5a + 5b)^2$ c) $(3p - 6q)^2$
 d) $(8m + 12n)^2$ e) $(18a - 30b)(18a + 30b)$ f) $(6x^2 - 8x + 2)^2$
 g) $(2v - 2w)^3$ h) $(9x + 3)^3$ i) $(4a - 4b)^4$
 k) $(ab + ac)^2$ l) $(x^2 - 3x)^2$ m) $(3u^2 - 12u)^3$
10. a) $bm + bn + cm + cn$ b) $xu - yu + xv - yv$ c) $gv + gw - hv - hw$
 d) $aq - bq - ar + br$ e) $ax + ay + bx + by + cx + cy$
 f) $mx + nx + px - m - n - p$ g) $bu - du - bv + dv + bw - dw$
 h) $py + qy - ry - pz - qz + rz$
11. a) $14mp + 14mq - 9np - 9nq$ b) $5cu - 8cv + 5du - 8dv$
 c) $21ax + 35ay + 20y + 12x$ d) $32pv^2 - 36qv^2 - 80pw^2 + 90qw^2$
 e) $175ax + 75ay - 35bx - 15by$ f) $amp - amq - anq + anp$
 g) $88ax^3 - 22ax^2 + 132bx^3 - 33bx^2$ h) $10a^2bx^2 + 4ab^2x^2 - 40a^2by^2 - 16ab^2y^2$
 i) $16du + 16dw + 9eu + 9ew - 11fu - 11fw$
 k) $3ms + 3ns - 3ps - 4mt - 4nt + 4pt$
 l) $(7d - 2)(10eg - 2fh) + (2 - 7d)(5eh - 4fg)$

4. Gibt es Quadratzahlen?

a. Binome

12. a) $g^2 + h^2 + 2gh$ b) $x^2 - 2x + 1$ c) $4n^2 + 4np + p^2$
 d) $p^2 - 8p + 16$ e) $m^2 + 26m + 169$ f) $225 + 30b + b^2$
 g) $36b^2 - 60bc + 25c^2$ h) $72ax + 81a^2 + 16x^2$ i) $84k + 196 + 9k^2$
 k) $\frac{4}{9}a^2 + ab + \frac{9}{16}b^2$ l) $a^2 - a + \frac{1}{4}$ m) $0.49x^2 + 0.09y^2 - 0.42xy$
 n) $25p^4 + 80p^2q^2 + 64q^4$ o) $y^4 - 20y^2 + 100$ p) $81a^6 + 121b^4 - 198a^3b^2$
 q) $a^2 + ab + b^2$ r) $16p^2 - 24pq + 36q^2$ s) $4m^2 + \frac{1}{4}n^2 - mn$
13. a) $15x^2 + 30xy + 15y^2$ b) $12r^2 + 75s^2 - 60rs$ c) $2c^2 - 6cd + \frac{9}{2}d^2$
14. a) $m^2 - n^2$ b) $100x^2 - 36$ c) $324p^2 - q^2$
 d) $1 - 4z^2$ e) $\frac{1}{25}m^2 - \frac{9}{4}n^2$ f) $2.56a^2 - 2.89b^2$
 g) $9x^4 - y^4$ h) $p^6 - 0.01q^6$ i) $3.61a^4 - 4b^6$
 k) $6g^2 - 6h^2$ l) $63v^2 - 28w^2$ m) $0.5x^4 - 0.18y^4$
15. a) $16p^4 - 81q^4$ b) $x^4 - 1$ c) $m^4 + n^4$
 d) $u^8 - v^8$ e) $a - a^3$ f) $324a^2x - 36x^5$
 g) $x^4 - 16x^2$ h) $x^3 - 100x$ i) $4x^5 - 100x^3$

16. a) $ap^2 + bp^2 - aq^2 - bq^2$ b) $12x - 20y + 5a^2y - 3a^2x$
 c) $90mv^2 - 40mw^2 + 135uv^2 - 60uw^2$ d) $9c^2e^2 - 4c^2 - 9d^2e^2 + 4d^2$
 e) $18a^5 - 8a^3b^2 + 45a^4b - 20a^2b^3$ f) $bx^3 + by^3 - cx^3 - cy^3$
 g) $12a^2 + 60ab + 75b^2$ h) $50s^3t + 140s^2t^2 + 98st^3$
 i) $605u^3v - 245uv^3$ k) $486p^4q^2 - 96p^2q^4$

17. a) $9x^2(a - 3b) - 18xy(a - 3b) + 9y^2(a - 3b)$
 b) $16ax^3 - 36axy^2 + 45bxy^2 - 20bx^3$ c) $32ax^2 - 48bx^2 - 50ay^2 + 75by^2$
 d) $a^2x^2 - b^2x^2 - c^2x^2 + 2bcx^2$ e) $m^2x^2 - m^2y^2 - n^2x^2 + n^2y^2$

b. Pseudobinome (Trinome)

18. a) $x^2 + 7x + 12$ b) $a^2 + 13a + 40$ c) $z^2 + 20z + 96$
 d) $m^2 + 5m + 6$ e) $p^2 + 5p + 4$ f) $b^2 + 10b + 9$
 g) $y^2 + 5y - 6$ h) $c^2 + 2c - 48$ i) $w^2 + w - 56$
 k) $r^2 - 5r - 6$ l) $g^2 - 4g - 21$ m) $t^2 - t - 42$
 n) $c^2 - 5c + 6$ o) $s^2 - 9s + 18$ p) $d^2 - 11d + 10$

19. a) $x^2 + x - 12$ b) $x^2 - x - 12$ c) $x^2 - 7x + 12$
 d) $x^2 + 8x + 15$ e) $x^2 - 10x + 24$ f) $x^2 - 13x + 22$
 g) $x^2 + 17x + 60$ h) $x^2 - 10x + 9$ i) $x^2 - 10x - 144$
 k) $x^3 - 3x^2 - 28x$ l) $x^3 + 3x^2 - 28x$ m) $x^4 + x^3 - 2x^2$

20. a) $9a^2 - (a - b)^2$ b) $(a - b)x^4 + (b - a)x^2$
 c) $9p^4(a - b) - 25q^2(a - b)$ d) $m^2 - n^2 - p^2 + 2np$ e) $100x^2 - 4(7x - 2y)^2$
 f) $(u + 3w)^2 - 9(w - q)^2$ g) $9(2a - x)^2 - 4(3a - x)^2$ h) $48(a + b)^2 - 12(a - b)^2$
 i) $2a^5 - 2a$ k) $(r + s)^4 - r^4$ l) $xz - yz - x^2 + 2xy - y^2$
 m) $p^2y^2 - 4p^2 - y^2 + 4$ n) $2k^4 - k^3 + k - 2$ o) $a^2y - aby + a^3y - ab^2y$
 p) $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2$ q) $y^4 + 2y^2 + 1 - 2y^3 - 2y$
 r) $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$

Anwendungen / Erweiterungen:

21. Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen in der Grundmenge $G = \mathbf{R}$

a) $7777(2x-37)=0$	b) $x(12x+96)=0$	c) $35x(7x+91)=0$
d) $(x-3)(x-4)=0$	e) $(x+5)(x-2)=0$	f) $(3x+12)(x-11)=0$
g) $(2x+7)(5x-8)=0$	h) $x(x-9)(2x+13)(3x-15)=0$	

22. Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen in der Grundmenge $G = \mathbf{R}$ mit Hilfe von Faktorzerlegung.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$	b) $x^2 - 9x + 20 = 0$	c) $x^2 - x - 20 = 0$
d) $x^2 - 5x - 24 = 0$	e) $x^2 - 2x + 63 = 0$	f) $x^2 - 5x - 14 = 0$
g) $x^2 + 13x - 65 = 3$	h) $x^2 - 21x + 70 = 2$	i) $x^2 - 5x - 45 = 5$
k) $x^2 - 15x + 6 = -44$	l) $x^2 - 7x - 150 = -30$	m) $x^2 - 29x + 129 = 9$

23. Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen in der Grundmenge $G = \mathbf{R}$ mit Hilfe von Faktorzerlegung.

a) $9x^3 + 18x^2 - x - 2 = 0$	b) $x^4 + x^2 = 2$	c) $x^3 = 3x^2 + 4x$
d) $2x^2 = 12x - 18$	e) $x^3 = -9x$	f) $x^3 + 16x = 8x^2$
g) $12z = 18z^2$	h) $(x-1)^2 = 16$	i) $(2x-1)^2 = 25$

24. Kürze vollständig:

a) $\frac{y^4 - y^2}{y^2 + 2y + 1}$	b) $\frac{-x^2 + 5x - 4}{16 - 8x + x^2}$	c) $\frac{-36x^2y}{12x^2y - 60xy}$
d) $\frac{2y + 2}{5y + 5}$	e) $\frac{rs - rt}{su - tu}$	f) $\frac{p^3 - p^2}{p^3 + p^2}$
g) $\frac{2s + 2t}{s^2 - t^2}$	h) $\frac{3v + 9}{5v^2 - 45}$	i) $\frac{10x + 25y}{12x^2 + 40xy + 25y^2}$
k) $\frac{x^2 - 2xy + y^2 - z^2}{x^2 - y^2 - 2yz - z^2}$	l) $\frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - 25}$	m) $\frac{z^2 - 16}{z^2 + z - 20}$
n) $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2}$	o) $\frac{x - y}{y - x}$	p) $\frac{1 - a}{4a - 4}$
q) $\frac{x^2 + 2x - 63}{7 - x}$	r) $\frac{64c^2 - 176c + 121}{121 - 64c^2}$	s) $\frac{r^2 - 2rs + s^2}{5rs - 5r^2}$

25. a) $(x + y)^2 - z^2$	b) $p^2 + 2pq + q^2 - r^2$
c) $x^2 - (y + z)^2$	d) $u^2 - v^2 - 2wv - w^2$
e) $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$	f) $49b^2 + 25c^2 - 70bc - 36d^2$

Lösungen

1. a) $4(x+y)$ b) $6(p-q)$ c) $4(r+3s)$
d) $2(2u-3v)$ e) $-3m$ f) $37(3g-2h)$
2. a) $q(p+r)$ b) $q(p-r)$ c) $p(p-q)$
d) $x(x+2)$ e) $a(a-1)$ f) $5(b+1)$
3. a) $5x(a+b)$ b) $7b(y-2z)$ c) $8p(3p+2q)$
d) $5u(4u-11)$ e) $13e(5+6e)$ f) $6z^2(7z+13)$
g) $r(49r-39)$ h) $17y^2(2y^2+1)$ i) $3ax(3+19x)$
4. a) $5(x-2y+3z)$ b) $27(2u+3v+4w)$ c) $17(4p+11q-3r-7s)$
d) $(a-b-c)x$ e) $u(v-u+w)$ f) $p(p-q+r-1)$
5. a) $-(x+y)$ b) $-(2p-q)$ c) $-(-4a+3b)$
d) $-(-6u-5v)$ e) $-(c-1)$ f) $-(5z^2-3y^2)$
g) $-(16a+21)$ h) $-(12m-n)$ i) $-(8a-4b+7c)$
k) $-(2x^2+15x-9)$ l) $-(-4.5y-z+0.8)$
6. a) $(x+y)(p+q)$ b) $(a+b)(x-y)$ c) $(a+2)(m-n)$
d) $(n-1)(y+z)$ e) $5(p-q)$ f) $(1+k)(v+w)$
g) $3(a-2b)(c-d)$ h) $8(2p-3q)(x+5)$ i) $3(2a-3b)(3x+2)$
k) $10(a+2b)(v+2w)$ l) $6xy(4x+3y)(2a-b)$ m) $78ab^2(2a^2-3b^2)(x+2y)$
n) $6(m-1)(11pq+17qr-8pr)$ o) $51xy^2(5a-3b)(5xy+6y^2-8x^2)$
7. a) $(p+1)(x+y)$ b) $(a-1)(u+v)$ c) $(a-b)(k-1)$
d) $(c-1)(p-q)$ e) $(b+1)(y-z)$ f) $(m+n)(r-s)$
g) $(a-b)(2x-3y)$ h) $2(3a+b)(2p-3q)$ i) $12(3c-d)(2x-3y)$
k) $15b(7a+4c-11d)(s-t)$
8. a) $(5a-b)(x+y)$ b) $(a-b)(5m+2n)$ c) $(11a-b)(u+v)$
d) $(11a-b)(u+v)$ e) $3(4p+q)(x-y)$ f) $16(a-b)(3x+y)$
g) $(c+14d)(u-2v)$ h) $b(x+y)$ i) $2(5m+18)(x-y)$
9. a) $4(x+y)(x-y)$ b) $25(a+b)^2$ c) $9(p-2q)^2$
d) $16(2m+3n)^2$ e) $36(3a-5b)(3a+5b)$ f) $4(3x^2-4x+1)^2$
g) $8(v-w)^3$ h) $27(3x+1)^3$ i) $256(a-b)^4$
k) $a^2(b+c)^2$ l) $x^2(x-3)^2$ m) $27u^3(u-4)^3$
10. a) $(b+c)(m+n)$ b) $(x-y)(u+v)$ c) $(g-h)(v+w)$
d) $(a-b)(q-r)$ e) $(a+b+c)(x+y)$ f) $(m+n+p)(x-1)$
g) $(b-d)(u-v+w)$ h) $(p+q-r)(y-z)$

11. a) $(14m-9n)(p+q)$ b) $(c+d)(5u-8v)$ c) $(7a+4)(3x+5y)$
d) $2(8p-9q)(2v^2-5w^2)$ e) $5(5a-b)(7x+3y)$ f) $a(m+n)(p-q)$
g) $11x^2(2a+3b)(4x-1)$ h) $2ab(5a+2b)(x+2y)(x-2y)$ i) $(16d+9e-11f)(u+w)$
k) $(m+n-p)(3s-4t)$
12. a) $(g+h)^2$ b) $(x-1)^2$ c) $(2n+p)^2$
d) $(p-4)^2$ e) $(m+13)^2$ f) $(15+b)^2$
g) $(6b-5c)^2$ h) $(9a+4x)^2$ i) $(3k+14)^2$
k) $\left(\frac{2}{3}a + \frac{3}{4}b\right)^2$ l) $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2$ m) $(0.7x-0.3y)^2$
n) $(5p^2+8q^2)^2$ o) $(y^2-10)^2$ p) $(9a^3-11b^2)^2$
q) kein vollständiges Quadrat r) $4(4p^2-6pq+9q^2)$ s) kein vollständiges Quadrat
13. a) $15(x+y)^2$ b) $3(2r-5s)^2$ c) $2\left(c - \frac{3}{4}d\right)^2$
14. a) $(m+n)(m-n)$ b) $2^2(5x+3)(5x-3)$ c) $(18p+q)(18p-q)$
d) $(1+2z)(1-2z)$ e) $\left(\frac{1}{5}m + \frac{3}{2}n\right)\left(\frac{1}{5}m - \frac{3}{2}n\right)$ f) $(1.6a+1.7b)(1.6a-1.7b)$
g) $(3x^2+y^2)(3x^2-y^2)$ h) $(p^3+0.1q^3)(p^3-0.1q^3)$ i) $(1.9a^2+2b^3)(1.9a^2-2b^3)$
k) $6(g+h)(g-h)$ l) $7(3v+2w)(3v-2w)$ m) $2(0.5x^2+0.3y^2)(0.5x^2-0.3y^2)$
15. a) $(4p^2+9q^2)(2p+3q)(2p-3q)$ b) $(x^2+1)(x+1)(x-1)$ c) nicht zerlegbar
d) $(u^4+v^4)(u^2+v^2)(u+v)(u-v)$ e) $a(1+a)(1-a)$ f) $36x(3a+x^2)(3a-x^2)$
g) $x^2(x+4)(x-4)$ h) $x(x+10)(x-10)$ i) $4x^3(x+5)(x-5)$
16. a) $(a+b)(p+q)(p-q)$ b) $(3x-5y)(2+a)(2-a)$ c) $5(2m+3u)(3v+2w)(3v-2w)$
d) $(c+d)(c-d)(3e+2)(3e-2)$ e) $a^2(2a+5b)(3a+2b)(3a-2b)$ f) $(b-c)(x+y)(x^2-xy+y^2)$
g) $3(2a+5b)^2$ h) $2st(5s+7t)^2$ i) $5uv(11u+7v)(11u-7v)$
k) $6p^2q^2(9p+4q)(9p-4q)$
17. a) $9(a-3b)(x-y)$ b) $x(2x-3y)(2x+3y)(4a-5b)$ c) $(2a-3b)(4x-5y)(4x+5y)$
d) $x^2(a+b-c)(a-b+c)$ e) $(m+n)(m-n)(x+y)(x-y)$
18. a) $(x+3)(x+4)$ b) $(a+8)(a+5)$ c) $(z+12)(z+8)$
d) $(m+2)(m+3)$ e) $(p+4)(p+1)$ f) $(b+1)(b+9)$
g) $(y+6)(y-1)$ h) $(c+8)(c-6)$ i) $(w+8)(w-7)$
k) $(r-6)(r+1)$ l) $(g+3)(g-7)$ m) $(t-7)(t+6)$
n) $(c-2)(c-3)$ o) $(s-3)(s-6)$ p) $(d-1)(d-10)$

