Leitprogramm – Bruchterme

- Jede Woche werden die Lernziele mit Angaben der zu machenden Übungen festgelegt.

- Jede Gruppe arbeitet selbständig in ihrem eigenen Tempo, die einzelnen SuS unterstützen sich gegenseitig.

- Bei Problemen und Fragen bitte Frau Ryser fragen

- Zur Kontrolle: Die Lösungen sind auf der letzten Seite. Jede Lösung kontrollieren!

- Wer die Lernziele in der Woche nicht erreicht, erledigt den Rest zu Hause.

- Es muss jeweils vom Freitag auf Montag repetiert werden.

Lernziele Woche 11

- Du kannst Polynome faktorisieren (Wiederholung).
- Du kannst das kgV und den ggT von Polynomen bestimmen.

Repetition: Faktorisieren

1. Ausklammern
2. Ausklammern in Teilsummen
3. Binome
4. Pseudobinome

Aufgabe 1
Faktorisiere vollständig!

a. $5ax + 5bx = ?$
b. $(2a - b)(x + y) + 3a(x + y) = ?$
c. $bm + bn - cm - cn = ?$
d. $81x^4 - y^4 = ?$
e. $x^2 - 5x - 6 = ?$

Lösungen:

a. $5ax + 5bx = 5x(a + b)$
b. $(2a - b)(x + y) + 3a(x + y) = (5a - b)(x + y)$
c. $bm + bn - cm - cn = (b - c)(m + n)$
d. $81x^4 - y^4 = (3x + y)(3x - y)(9x^2 + y^2)$
e. $x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1)$

kgV und ggT

Um das kgV und den ggT zweier Polynome berechnen zu können, werden die Polynome zuerst in ihre Primfaktoren zerlegt (d.h. vollständig faktorisiert).
Für das kgV nimmt man die Primfaktoren, die in mindestens einer der beiden Zerlegungen vorkommen, und als zugehörigen Exponenten den jeweils größeren der Ausgangsexponenten.
Für den ggT verwendet man alle Primfaktoren, die in mindestens einer der Zahlen vorkommen, mit der jeweils höchsten vorkommenden Potenz.

Beispiel: Bestimme ggT und kgV von $d^2 - 9$, $d - 3$, $d^2 - 9d + 18$

Primfaktorzerlegung

$d^2 - 9 = (d + 3)(d - 3)$
$d - 3 = d - 3$
$d^2 - 9d + 18 = (d - 6)(d - 3)$

kgV = $(d + 3)(d - 3)(d - 6)$
ggT = $d - 3$

Aufgabe 2
Bestimme sowohl den ggT als auch das kgV folgender Polynome:

a. $6d$, $4d$
b. $-9xy$, $45xz$
c. $9r^2s^2t$, $36r^2s^3$
d. a , $a + b$
e. $4i + 4$, $5i + 5$
f. $4c^2 - 6cd$, $2c$
g. z , $z^2 - 3z$
h. $15t - 25$, $-6t + 10$
i. $5p$, $p + 5$
j. $u^2 + uv$, $u^2 - uv$
k. $h^2 - h$, $h - h^2$
l. $abc + b^2c$, $a^2b + ab^2$
m. $6p - 9$, $4p^2 - 6p$
n. $s - s^2$, $s^3 - s$
o. $e^2 - f^2$, $(e - f)^2$
p. $r^2 - 8r + 15$, $- r^2 - r + 12$
q. $am + an - bm - bn$, $m^2 - n^2 + m + n$

Lösungen:

a. $2d$, $12d$
b. $9x$, $45xyz$
c. $9r^2s^2$, $36r^2s^3t$
d. teilerfremd, $a(a + b)$
e. $i + 1$, $20(i + 1)$
f. $2c$, $2c(2c – 3d)$
g. Z , $z(z – 3)$
h. $3t – 5$, $10(3t – 5)$
i. teilerfremd , $5p(p + 5)$
j. u , $u(u + v)(u – v)$
k. $h(h – 1)$, $h(h – 1)$
l. $b(a + b)$, $abc(a + b)$
m. $2p – 3$, $6p(2p – 3)$
n. $s(1 – s)$, $s(s + 1)(s – 1)$
o. $e – f$, $(e + f)(e – f)^2$
p. $r – 3$, $(r – 3)(r – 5)(r + 4)$
q. $m + n$, $(m + n)(a – b)(1 + m – n)$

Lernziele Woche 12

Am Ende der Woche solltest du folgende Fragen beantworten können:

- Was sind Bruchterme?
- Wieso ist der Definitionsbereich eines Bruchtermes eingeschränkt?
- Wie kann ich das Aussehen eines Bruchtermes verändern, ohne dessen Wert zu verändern?

Definitionsbereich

Ein **Term** ist ein Rechenausdruck mit Zahlen und Variablen. Bsp.: $x^2 - 7$ / $a(a - b)$

Ein Quotient zweier Terme heisst **Bruchterm**. Der Term oberhalb des Bruchstriches heisst **Zähler** und der Term unterhalb **Nenner**. Bsp.: $\frac{3}{x}$ / $\frac{2+x}{3-x}$ / $\frac{1}{(a+b)^2}$

Da wir von Quotienten sprechen, müssen wir darauf achten, dass wir keine Division durch Null ausführen. Also müssen wir den Definitionsbereich eines Bruchtermes einschränken: Wir müssen verhindern, dass der Nenner des Bruchtermes Null werden kann:

D = **R** \ {Menge der Nullstellen des Bruchtermes}.

Beispiele:

1.	$\frac{3}{x}$	$x \neq 0$	**D** = **R** \ {0}
2.	$\frac{2}{x-1}$	$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$	**D** = **R** \ {1}
3.	$\frac{3-x}{(x+2)(x-1)}$	$(x + 2)(x - 1) \neq 0 \Rightarrow x_1 \neq -2,\ x_2 \neq= 1$	**D** = **R** \ {- 2, 1}

Aufgabe 3

Berechne die Definitionsbereiche der folgenden Bruchterme: (G = **R**)

a) $\frac{2x+5}{4x}$ b) $\frac{3-7a}{a+6}$ c) $\frac{a^2+1}{2a-18}$

d) $\frac{5y}{y^2-9}$ e) $\frac{4e-2e^2}{e^2-e}$ f) $\frac{b^2+2b+1}{3b^2-48}$

g) $\frac{9t-11t^3}{4t^2-36}$ h) $\frac{a^2+1}{6a-a^2}$ i) $\frac{3b}{b^2+4b+4}$

j) $\frac{1}{2x^2+72}$ k) $\frac{5a-1}{a^3-4a}$ l) $\frac{13-4z}{z^3+2z^2+z}$

m) $\frac{3a-1}{(a-2)^2-a^2+4}$ n) $\frac{8-f}{(f+3)^2+(f+4)(f+3)}$

Lösungen

a) $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ b) $\mathbf{R}\setminus\{-6\}$ c) $\mathbf{R}\setminus\{9\}$ d) $\mathbf{R}\setminus\{\pm 3\}$

e) $\mathbf{R}\setminus\{0;1\}$ f) $\mathbf{R}\setminus\{\pm 4\}$ g) $\mathbf{R}\setminus\{\pm 3\}$ h) $\mathbf{R}\setminus\{0;6\}$

i) $\mathbf{R}\setminus\{-2\}$ j) $\mathbf{R}$ k) $\mathbf{R}\setminus\{0;\pm 2\}$ l) $\mathbf{R}\setminus\{0;-1\}$

m) $\mathbf{R}\setminus\{2\}$ n) $\mathbf{R}\setminus\{-3;-3.5\}$

Erweitern und Kürzen

Die Dir vom Rechnen mit Brüchen bekannten Operationen Erweitern und Kürzen lassen sich auch auf Bruchterme übertragen.

Ein Bruchterm wird mit einem Term T erweitert,
indem sowohl Zähler als auch Nenner mit T multipliziert werden: $\frac{x-1}{2+x} = \frac{T(x-1)}{T(2+x)}$.
Ein Bruchterm wird mit einem Term T gekürzt,
indem sowohl Zähler als auch Nenner durch T dividiert werden: $\frac{T(x-1)}{T(2+x)} = \frac{x-1}{2+x}$.

Der Wert des Bruchtermes wird durch Kürzen bzw. Erweitern nicht verändert. Kürzen bzw. Erweitern ist also eine Aequivalenzumformung.

Aufgabe 4

Kürze die folgenden Terme so weit wie möglich:

a) $\frac{2x^2 - 2x}{3(x-1)}$ b) $\frac{8y^2 + 16y}{24y}$ c) $\frac{12x^2 - 16x}{4x + 8}$

d) $\frac{7p + 14}{p^2 + 4p + 4}$ e) $\frac{a^2 - 2a + 1}{1 - a^2}$ f) $\frac{a^2 - 4}{a^2 + 5a + 6}$

g) $\frac{d^2 - 4}{de + 2e - 2 - d}$ h) $\frac{x^2 + 2x - 63}{7 - x}$ i) $\frac{8u - 4w}{8w - 16u}$

Aufgabe 5

Bringe die folgenden Brüche auf den angegebenen Nenner N:

a) $\frac{1}{9m-6n}$; N = $27m^2 - 36mn + 12n^2$ b) $\frac{4x+5}{5-2x}$; N = $4x^2 - 25$

c) $\frac{q+1}{p(q-1)}$; N = $pq^2 - p$ d) $\frac{6z-1}{z-7}$; N = $z^2 - 5z - 14$

Aufgabe 6

Bestimme die fehlenden Zähler und Nenner:

a) $\frac{11x-}{5x+3} = \frac{\dots}{3+5x}$ b) $\frac{z-2}{12z+1} = \frac{5z^2-20}{\dots}$ c) $\frac{7s-t}{4s+3} = \frac{\dots}{8s^2+6s}$

d) $\frac{(2x)^2}{3} = \frac{\dots}{12-3x}$ e) $\frac{\dots}{16s^2+24s+9} = \frac{2t^2-98s^2}{\dots}$

Lösungen

Aufgabe 4

a) $\frac{2x}{3}$ b) $\frac{y+2}{3}$ c) $\frac{x(3x-4)}{x+2}$ d) $\frac{7}{p+2}$

e) $\frac{1-a}{1+a}$ f) $\frac{a-2}{a+3}$ g) $\frac{d-2}{e-1}$ h) $-(x+9)$

i) $-\frac{1}{2}$

Aufgabe 5

a) $\frac{3m-2n}{3(3m-2n)^2}$ b) $\frac{(4x+5)(2x+5)}{-(2x-5)(2x+5)}$ c) $\frac{(q+1)^2}{p(q+1)(q-1)}$ d) $\frac{(6z-1)(z+2)}{(z-7)(z+2)}$

Aufgabe 6

a) $11x - 7$ b) $5(12z + 1)(z + 2)$ c) $2s(7s - t)$ d) $(2x)^2(4 - x)$

Lernziele Woche 13

- Kennenlernen des Hauptnenners
- Addition von Bruchtermen
- Alles hat mit Faktorisieren zu tun!
- Die Subtraktion ist eigentlich eine Addition
- Resultate werden vollständig gekürzt
- Nenner faktorisiert stehen lassen
- „In Summen kürzen nur die Dummen“

Das Rechnen mit Bruchtermen verläuft ebenso wie das Rechnen mit Brüchen:

1. Addition / Subtraktion

Addiere: $\frac{7}{20}+\frac{4}{15}=$

Was hast Du gemacht ? :

Hauptnenner / gleichnamig machen

Bruchterme mit gleichem Nenner heissen **gleichnamig/gleichnennrig**. Ungleichnamige Bruchterme lassen sich durch Erweitern gleichnamig machen:

1. Faktorisiere alle Nenner so weit wie möglich.
2. Suche das kgV all dieser Faktoren
3. Das kgV wird nun der neue Nenner aller Brüche.
4. Erweitere die Zähler entsprechend.

Den so bestimmten gemeinsamen Nenner nennt man **Hauptnenner**.

Aufgabe 7

Addiere und Kürze

a) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}$ b) $\frac{7}{t-1}+\frac{6}{1-t}$ c) $x-\frac{x^2-2}{x-2}$

d) $\frac{k-l}{4k+4l}+\frac{k+4l}{6k+6l}$ e) $\frac{s+7}{3s-6}-\frac{s+4}{s^2-2s}$ f) $\frac{u}{uv+v^2}-\frac{v}{u^2+uv}$

i) $\frac{3z}{(z-2)^2}-\frac{2}{z}+\frac{z+4}{2z-z^2}$ k) $\frac{z+9}{z^2-1}-\frac{z+5}{z^2+z}$ l) $1+f+\frac{f^2}{1-f}$

Aufgabe 8

Fasse zu einem Bruchterm zusammen:

b) $\frac{m-3}{m+4}-\frac{m^2-9m-3}{m^2+m-12}+\frac{m-5}{m-3}$ c) $\frac{a}{a-x}+\frac{3a}{a+x}+\frac{2ax}{x^2-a^2}$

d) $\frac{2}{m}-\frac{3}{1-2m}-\frac{2m-3}{4m^2-1}$ e) $\frac{1}{x}+\frac{2}{1-x}-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{(x-1)^3}$

f) $\frac{a}{a+b}-\frac{a^2-ab}{(a-b)^2}$ g) $\frac{x-2y}{x+y}-\frac{2x-y}{y-x}-\frac{2x^2}{x^2-y^2}$

i) $\frac{x^2+x+1}{(1-2x)^3}-\frac{x+1}{(1-2x)^2}-\frac{1}{2x-1}$ j) $\frac{a+b}{a}-\frac{a}{a-b}+\frac{b^2}{a^2-ab}$

Lösungen

Aufgabe 7

a) $\frac{4ab}{a^2-b^2}$ b) $\frac{1}{t-1}$ c) $\frac{-2(x-1)}{x-2}$ d) $\frac{5}{12}$ e) $\frac{s+6}{3s}$ f) $\frac{u-v}{uv}$ i) $\frac{6}{(z-2)^2}$ k) $\frac{5}{z(z-1)}$ l) $\frac{1}{1-f}$

Aufgabe 8

b) $\frac{m-2}{m-3}$ c) $\frac{4a}{a+x}$ d) $\frac{12m^2+6m-2}{m(4m^2-1)}$ e) $\frac{x^3+1}{x(1-x)^3}$ f) $\frac{2ab}{b^2-a^2}$ g) $\frac{x-y}{x+y}$ i) $\frac{7x^2-2x+1}{(1-2x)^3}$ j) 0

Lernziele Woche 14

- Multiplikation / Division von Bruchtermen
- Alles hat mit Faktorisieren zu tun!
- Die Multiplikation ist einfacher als die Addition
- Die Division ist eigentlich eine Multiplikation
- Resultate werden vollständig gekürzt
- Nenner faktorisiert stehen lassen
- „In Summen kürzen nur die Dummen"

Multiplikation:

Multipliziere: $3 \cdot \frac{2}{9} =$

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{27} =$$

Beschreibe den Vorgang:

Aufgabe 9

Multipliziere indem du zuerst gekürzt hast:

a) $\dfrac{14ab}{5a^2-5b^2}\cdot\dfrac{10a+10b}{7ab^3}$

b) $\dfrac{12-24y}{16x+40}\cdot\dfrac{4x+10}{4y^2-1}$

c) $\dfrac{ab-5c}{a^2-9c^2}\cdot\dfrac{11a+33c}{7abc-35c^2}$

d) $\dfrac{9z^2+12w}{12z-20}\cdot\dfrac{18z-30}{9z^4-16w^2}$

e) $\dfrac{a^2-b^2}{(a+b)^2}\cdot\dfrac{2a+2b}{3b-3a}$

f) $\dfrac{ax+ay}{x^2-2xy+y^2}\cdot\dfrac{y-x}{ax^2+2axy+ay^2}$

i) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{x^2+xy}{(x-y)^2}\cdot\dfrac{x^4-y^4}{(x+y)^2}$

j) $\dfrac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2}\cdot\dfrac{x-y}{x^2+xy}$

k) $\dfrac{c^2-d^2}{c^2-4c+3}\cdot\dfrac{c-3}{(d-c)^2}$

Lösungen

a) $\dfrac{4}{b^2(a-b)}$

b) $-\dfrac{3}{2y+1}$

c) $\dfrac{11}{7c(a-3c)}$

d) $\dfrac{9}{2(3z^2-4w)}$

e) $-\dfrac{2}{3}$

f) $\dfrac{1}{y^2-x^2}$

i) $x(x+y)$

j) $\dfrac{x^2+y^2}{x}$

k) $\dfrac{c+d}{(c-1)(c-d)}$

Division

Führe folgende Division aus: $\frac{4}{10} : \frac{6}{27} =$

Beschreibe den Vorgang:

Aufgabe 10

Forme zu einem gekürzten Bruchterm um:

a) $\frac{2x^2 + 4yx + 2y^2}{(3xy)^2} : \frac{x^2 - y^2}{9x^2 y}$

b) $\frac{16u^2 - 9b^2}{24(b+u)} : \frac{4u - 3b}{36(u+b)}$

c) $\frac{4u - 3t}{u^2 + 4tu + 4t^2} : \frac{16u^2 - 9t^2}{7u + 14t}$

d) $\frac{6a - 6b}{a + b} \cdot \left(\frac{3a^2 + 6ab + 3b^2}{16ab} : \frac{a^2 - b^2}{12ab^2} \right)$

e) $\frac{6a^2 - 6}{a^2 + 2ab + b^2} : \left(\frac{2(a-b)}{ab + b} \cdot \frac{3ab - 3b}{a^2 - b^2} \right)$

f) $\frac{a^4 - 1}{ac - c^2} : \frac{(4a^2 + 4)(a^2 - 1)}{a^2 - ac - ab + bc}$

g) $\frac{m^2 - m - 12}{a^2} : \frac{m - 4}{a^2 - a}$

h) $(a - b)(a - c) : \frac{a^2 - b^2}{a - c}$

Lösungen

a) $\frac{2(x+y)}{y(x-y)}$

b) $\frac{3(4u + 3b)}{2}$

c) $\frac{7}{(4u + 3t)(u + 2t)}$

d) $\frac{27b}{2}$

e) $\frac{(a+1)^2}{a+b}$

f) $\frac{a-b}{4c}$

g) $\frac{(m+3)(a-1)}{a}$

h) $\frac{(a-c)^2}{a+b}$

Lernziele Woche 17

- Doppelbruchterme: Division von Bruchtermen
- Die Division ist eigentlich eine Multiplikation
- Alles hat mit Faktorisieren zu tun!
- Resultate werden vollständig gekürzt
- Nenner faktorisiert stehen lassen
- „In Summen kürzen nur die Dummen“

Doppelbrüche

Ein Bruchterm, in dessen Zähler und Nenner wieder Bruchterme auftreten, heisst Doppelbruch. Damit klar erkenntlich ist, was Zähler und was Nenner ist, muss der Hauptbruchstrich deutlich länger sein als die Nebenbruchstriche.

Ein Doppelbruch ist nichts anderes als eine Division eines Bruchtermes durch einen anderen Bruchterm, wie unter der Division beschrieben.

Nimm ein Zahlenbeispiel und überlege Dir, wie Du einen Doppelbruch auflösen kannst:

Aufgabe 11

Vereinfache:

a) $\dfrac{\dfrac{2y+6}{y+1}}{\dfrac{y^2+6y+9}{\frac{1}{2}\left(y+1\right)}}$

b) $\dfrac{\dfrac{2a+4}{a^2}}{\dfrac{3a+6}{2a^3}}$

c) $\dfrac{\dfrac{5}{x+a}-\dfrac{7}{x-a}}{\dfrac{2}{x^2-a^2}}$

d) $\dfrac{\dfrac{4a-8b}{a^2-4b^2}}{5}$

e) $\dfrac{\dfrac{a}{a^2-1}}{\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1}{a-1}}$

f) $\dfrac{x^2+a^2}{\dfrac{a}{a-x}-\dfrac{x}{a+x}}$

g) $\dfrac{\dfrac{2a}{a-3}-\dfrac{a}{a+4}}{\dfrac{a+11}{a^2+a-12}}$

h) $\dfrac{a}{1+\dfrac{1}{a+1}}$

i) $\dfrac{\dfrac{r+s}{r-s}-\dfrac{r-s}{r+s}}{1-\dfrac{r^2+s^2}{r^2-s^2}}$

j) $\dfrac{\dfrac{a}{c}-\dfrac{a+ab}{a+c}}{6a^2-12abc+6b^2c^2}$

k) $\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}}$

Lösungen

a) $\dfrac{1}{y+3}$

b) $\dfrac{4a}{3}$

c) $-(6a+x)$

d) $\frac{20}{a+2b}$

e) $-\dfrac{a}{2}$

f) a^2-x^2

g) a

h) $\frac{a(a+1)}{a+2}$

i) $-\dfrac{2r}{s}$

j) $\dfrac{a}{6c(a+c)(a-bc)}$

k) $\dfrac{x}{x+1}$

Vermischte Aufgaben

Aufgabe 12

Forme zu einem Bruchterm um:

a) $\left(\frac{3}{s+1}-1\right)\left(\frac{3}{2-s}-1\right)$

b) $\left(a-\frac{a}{a+1}\right)\left(1-\frac{1}{a^2}\right)$

c) $\left(y+1+\frac{1}{2y-1}\right)\left(y-1+\frac{1}{2y+1}\right)$

d) $\frac{a^2+ab}{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)$

e) $\left(a-\frac{4ab}{a+b}+b\right)\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}+\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)$

f) $\left(\frac{1}{1-e}-1\right)\left(e-\frac{1-2e^2}{1-e}+1\right)$

i) $\left(z^2-1\right)\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1+z}-1\right)$

j) $\left(\frac{m+1}{m+2}-\frac{m-1}{m-2}\right)\cdot\frac{m^2-4}{2m}$

Aufgabe 13

Vereinfache so weit es geht:

a) $\frac{45a}{a^2-b^2}:\left(\frac{7a}{a+b}+\frac{a}{2a+2b}\right)$

b) $\frac{1}{6x}+\frac{3x^2y+xy^2}{4(x+y)}:\frac{3x^2y^2}{x+y}$

c) $\left(\frac{az+1}{z^2-1}-\frac{a}{z-1}+\frac{a}{z^2+z}\right):\frac{1}{z(z+1)}$

d) $\left[\frac{p^2-q^2}{pq}-\frac{1}{p+q}\left(\frac{p^2}{q}-\frac{q^2}{p}\right)\right]:\frac{p-q}{p}$

e) $\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right):\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)$

f) $\left(\frac{ay+1}{y^2-1}-\frac{a}{y-1}+\frac{a}{y^2+y}\right):\frac{1}{y^2+y}$

Lösungen

Aufgabe 12

a) 1

b) $a-1$

c) y^2

d) $\frac{a}{a-b}$

e) a - b

f) $\frac{e^3}{(1-e)^2}$

i) $3 - z^2$

j) -1

Aufgabe 13

a) $\frac{6}{a-b}$

b) $\frac{x+y}{4xy}$

c) $\frac{z-a}{z-1}$

d) $\frac{p}{p+q}$

e) $\frac{m+n}{n-m}$

f) $\frac{-a+y}{y-1}$