Algebra/Arithmetik

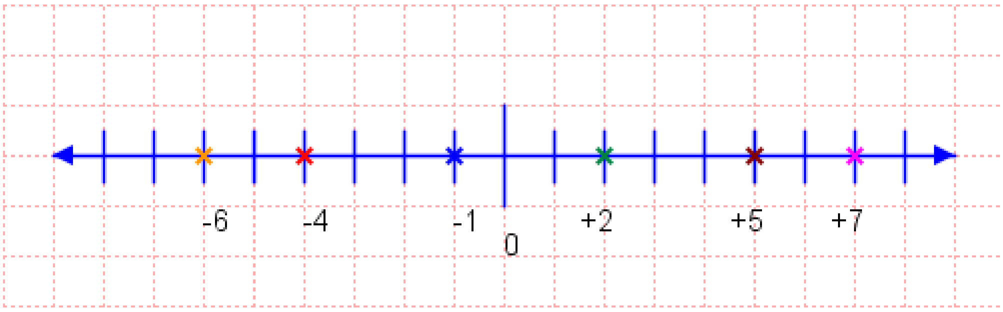
1. Grundbegriffe

- **Geometrie**: Lehre von den Raumgrössen
- **Algebra**: Lehre von den Gleichungen
- **Arithmetik**: Lehre von den Zahlengrössen (Zahlen, Variablen)

Definition:	Eine **Variable** ist ein Platzhalter oder ein Stellvertreter für eine Zahl.

Bsp.: 15 + 2 sei dasselbe wie a + b, dann hat a den Wert 15 und b den Wert 2.

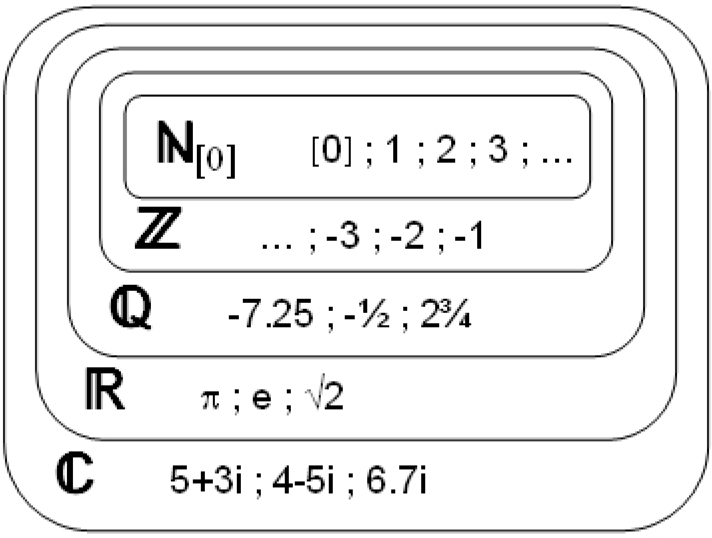
Diese "bestimmten" Zahlen bilden jeweils eine Menge, die wir auf dem **Zahlenstrahl** darstellen können:



Aus dem Zahlenstrahl wird ersichtlich, dass die Zahlen eine bestimmte Ordnung haben: **Ordnungsrelationen** (<, =, >).

Wir werden folgende Zahlenmengen antreffen:

Die **natürlichen** Zahlen: **N**
Die **ganzen** Zahlen: **Z**
Die **rationalen** Zahlen: **Q**
Die **reellen** Zahlen: **R**
Die **komplexen** Zahlen: **C**



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

2. Grundoperationen

Definition:	Eine **Operation** ist die Verknüpfung zweier Zahlen auf eine ganz bestimmte Art und Weise.

1. Addition **Summand + Summand = Summe**

Kommutativgesetz: $a + b = b + a$

Assoziativgesetz: $a + (b + c) = (a + b) + c$

Eine Variable kann mehrstellig sein, bzw. aus einer Zahl und einem Buchstaben bestehen. Der Multiplikationspunkt zwischen der Zahl und dem Buchstaben wird dabei weggelassen: 3*a=3a. Was man zwischen zwei Zahlen jedoch nie tun darf: 3*5 = 35 wäre paradox.

Definition:	Eine Zahl, bzw. Variable verknüpft mit dem **neutralen Element** bleibt unverändert.

Bsp.: Neutrales Element der Addition: 0.

Definition:	Die Verknüpfung einer Zahl mit ihrem **inversen Element** ergibt das neutrale Element der Operation.

Bsp.: Inverses Element der Addition: - a.

2. Subtraktion **Minuend - Subtrahend = Differenz**

Gilt das **Kommutativgesetz**? Nein

Gilt das **Assoziativgesetz**? Nein

Neutrales Element der Subtraktion: 0

Inverses Element der Subtraktion: -a

Die Subtraktion ist nichts anderes als die Umkehrung der Addition. Die Zeichen + und - sind entgegengesetzte Rechenzeichen.

3. Multiplikation **Faktor * Faktor = Produkt**

Kommutativgesetz: **$a * b = b * a$**

Assoziativgesetz: **$(a*b) * c = a *(b*c)$**

Neutrales Element: 1

Inverses Element: $1/a$

Distributivgesetz: **$a * (b + c) = a * b + a * c$**

Die Multiplikation ist eine wiederholte Anwendung der Addition: $a + a + a + a = 4 * a = 4a$.

4. Division **Dividend : Divisor = Quotient**

Kommutativgesetz: Nein

Assoziativgesetz: Nein

Neutrales Element: 1

Inverses Element: a

Wir haben gesagt, die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition, beide besitzen dasselbe neutrale Element. Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation, also besitzen die zwei auch dasselbe neutrale Element.

Verbot: **Durch Null kann man nicht dividieren.**

Beweis: *Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition:*
Falls $a + b = c$, muss umgekehrt gelten: $c - a = b$ und $c - b = a$
Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation:
Falls $a * b = c$, muss umgekehrt gelten: $c / a = b$ und $c / b = a$
also: $c / 0 = a \Leftrightarrow a * 0 = c$ ($c<>0$)

3. Klammerregeln

- **In einem Ausdruck müssen immer zuerst die Terme in der Klammer ausgerechnet werden.**

- **Stehen in einem Ausdruck mehrere Klammern ineinanderverschachtelt, müssen die Klammern von innen nach aussen aufgelöst werden.**

- **Steht vor einer Klammer ein Plus, ändern die Rechenzeichen in der Klammer nicht, die Klammer kann ohne weiteres weggelassen werden.**

- **Steht vor einer Klammer ein Minus, so ändern sich die Rechenzeichen in der Klammer, denn es gilt:**

+ * + = +	**+ * - = -**
- * - = +	**- * + = -**

Merke:	Nur gleichartige Variablen können miteinander addiert/subtrahiert werden.

<u>Ausklammern:</u>	Haben mehrere Glieder einer Summe einen gemeinsamen Faktor, so kann man ihn ausklammern, dadurch wird er nur noch einmal geschrieben.

Bsp.: 2x + 6y – 4z = 2(x + 3y – 2z)

4. Potenzen

$$\boxed{\textbf{Basis hoch Exponent = Potenz}}$$

Besteht ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren, so bezeichnet man es verkürzt als **Potenz.** Der **Exponent** (Hochzahl) gibt an, wie oft die **Basis** (Grundzahl) als Faktor gesetzt werden soll.

Man setzt $a^1 = a$.
Eine Zahl mit Exponent Null ist immer gleich 1: $a^0 = 1$.

Wenn wir positive Zahlen miteinander multiplizieren, ist das Produkt immer positiv. Also ist der Wert einer Potenz mit positiver Basis auch immer positiv.
Der Wert einer Potenz mit negativer Basis ist negativ, wenn der Exponent ungerade ist und positiv, wenn der Exponent gerade ist.

Rechenregeln

1. Addition

Potenzen gleicher Basis und mit gleichem Exponenten werden addiert, indem man ihre Beizahlen addiert.

Beispiel: $3a^2 + 2a^2 - a^2 = 4a^2$

2. Subtraktion

Analog Addition.

Beispiel: $20a^2b^3 + 6a^3b^2 + 4a^3b^2 + 2a^3c^2 - 12a^2b^3 = 10a^3b^2 + 8a^2b^3 + 2a^3c^2$

3. Multiplikation

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis beibehält.

$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

Beispiel: $(\overset{1}{2} * \overset{2}{2} * \overset{3}{2}) * (\overset{1}{2} * \overset{2}{2} * \overset{3}{2} * \overset{4}{2}) = 2^{3+4} = 2^7 = 128$

Potenzen mit gleichen Exponenten werden miteinander multipliziert, indem man das Produkt der Basis mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

$$a^n * b^n = (a * b)^n$$

Beispiel: $4a^3x^7 * 5a^4x^2 = 4 * 5 * a^3 * a^4 * x^7 * x^2 = 20a^7x^9$

4. Division

Potenzen gleicher Basis werden dividiert, indem man die Basis beibehält und die Exponenten subtrahiert.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man den Quotienten der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

$$\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$$

5. Potenzieren von Potenzen

Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m*n}$$

6. Potenzieren von Summen (Binome)

Eine Summe oder Differenz wird potenziert, indem man die Potenz in ein Produkt verwandelt und die entstehenden Klammern ausrechnet.

Binome: $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
u.s.w.

5. Das Pascal Dreieck

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	$a + b$
$(a+b)^2$	$a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)^3$	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a+b)^4$	$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a+b)^5$	$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

6. Faktorzerlegung

1. Kann ich etwas ausklammern?
2. Sind Quadrate vorhanden (Binome, Pseudobinome)
3. Polynomdivision

Polynomdivision: $(y^3 - 10y^2 + 16y + 48) : (y - 6) = y^2 - 4y - 8$

$$\begin{array}{l}
(y^3 - 10y^2 + 16y + 48) : (y-6) = y^2 - 4y - 8 \\
\underline{-(y^3 - 6y^2)} \\
\quad - 4y^2 + 16y + 48 \\
\quad \underline{-(-4y^2 + 24y)} \\
\qquad - 8y + 48 \\
\qquad \underline{-(-8y + 48)} \\
\qquad 0
\end{array}$$

7. Primfaktorzerlegung (kgV, ggT)

Dies ist die Zerlegung einer Zahl, bzw. einer Variable in ihre Primzahlen.

Primzahl:	Ist eine Zahl nur durch sich selbst und durch 1 teilbar, so ist sie eine Primzahl. Die kleinste Primzahl ist die 2, die zugleich auch die einzige gerade Primzahl ist.

Die Primfaktorzerlegung besteht nun darin, dass man bei der kleinsten Primzahl beginnt, kontrolliert, ob die Zahl, die man zerlegen will, durch diese Primzahl teilbar ist. Wenn ja, teilt man die Zahl durch die Primzahl. Man bleibt so lange bei dieser Primzahl, bis die zu zerlegende Zahl nicht mehr durch sie teilbar ist, dann nimmt man die nächste Primzahl. Zuletzt hat man die ursprüngliche Zahl als Darstellung lauter Primzahlen.

Anwendung der Primfaktorzerlegung: kgV / ggT

Kleinstes Gemeinsames Vielfaches (kgV)
1. Zerlege die Zahlen in ihre Primfaktoren.
2. Suche von jeder vorkommenden Primzahl die grösste Anzahl.
3. Das Produkt dieser Primfaktoren ergibt das kgV.

Auch für Variablen gilt dieses Verfahren. Hat man zum Beispiel die Variable 120ax, betrachtet man a und x als Primzahlen, da sie sich nicht weiter zerlegen lassen.

Grösster gemeinsamer Teiler (ggT)
1. Zerlege die Zahlen in ihre Primfaktoren.
2. Suche die gemeinsamen Primfaktoren.
3. Das Produkt dieser Primfaktoren ergibt den ggT.

Auch anwendbar auf Variablen, analog wie beim kgV.